УДК 517.512.6

О некоторых экстремальных задачах на классах суммируемых функций

Л. Г. Хомутенко

Пусть $L = L(0,2\pi)$ — пространство суммируемых 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_L = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{dt}$ и пусть $\omega_1(f, t) = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \| f(x+h) - - f(x)\|_L$ — интегральный модуль непрерывности функции $f(x) \in L$.

Говорят, что функция $f^{(r)}(t) \in L$ имеет производную r-го порядка $(r > 0)$ в смысле Вейля, равную $f^r(t) = \varphi(t)$, если $f(t)$ связана с $\varphi(t)$ равенством

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_r(x)\,\varphi(t-x)\,\mathrm{dx},$$

где

$$D_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kx - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

а $\varphi(t) \in L$ и такая, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{dt} = 0. \tag{*}$$

Считаем еще $f^{(0)}(t) = f(t)$, если $f(t)$ удовлетворяет условию (*).

Обозначим через $W^r KH^1_L$ — класс функций из L, r раз дифференцируемых в смысле Вейля, у которых интегральный модуль непрерывности r-й производной $(r \geqslant 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_1(f^{(r)}, t) \leqslant K\cdot t \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi). \tag{1}$$

В этой заметке мы распространяем на введенные выше классы функций некоторые результаты С. М. Никольского [1] и В. К. Дзядыка [2], связанные с вычислением верхних граней наилучших приближений, норм функций и приближений суммами Фурье и Фейера.

Пусть $V(0, 2\pi)$ — класс функций $f(x)$ из L, имеющих ограниченное изменение на периоде, и таких, что при любом $x \in [0, 2\pi]$

$$\min\{f(x-0), f(x+0)\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{f(x-0), f(x+0)\}.$$

Нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Если* $f(x)\in V(0,2\pi)$, *то*

$$\lim_{t\to+0}\frac{\omega_1(f,t)}{t}=\bigvee_0^{2\pi} f. \tag{2}$$

Доказательство. В. А. Матвеевым (см., [3, теорема 1]) доказано, что для функции $f(x)\in V(0,2\pi)$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dx=\bigvee_0^{2\pi} f.$$

Поэтому

$$\varliminf_{t\to+0}\frac{\omega_1(f,t)}{t}=\varliminf_{t\to+0}\sup_{|h|\leqslant t}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{t}\right|dx\geqslant$$

$$\geqslant\varliminf_{t\to 0}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dx=\bigvee_0^{2\pi} f.$$

С другой стороны, в силу неравенства (см. [4, лемма 1])

$$\omega_1(f,t)\leqslant\bigvee_0^{2\pi} ft \qquad (0\leqslant t\leqslant\pi) \tag{3}$$

имеет место соотношение $\varlimsup\limits_{t\to+0}\dfrac{\omega_1(f,t)}{t}\leqslant\bigvee\limits_0^{2\pi} f$, и равенство (2) доказано.

Обозначим через $W_*^rKH_L^1$ множество функций $f(t)$ класса $W^rKH_L^1$ с абсолютно непрерывной r-й производной и пусть W^rLK— класс функций из L, имеющих r-ю производную в смысле Вейля с нормой $\|f^{(r)}\|_L\leqslant K$.

Лемма 2. *При любом* $r\geqslant 0$

$$W_*^rKH_L^1=W^{r+1}LK.$$

В самом деле, пусть $f(t)\in W_*^rKH_L^1$, тогда $f^{(r)}(t)\in V(0,2\pi)$ и из (2) в силу (1) получим, что $\|f^{(r+1)}\|_L=\bigvee\limits_0^{2\pi} f^{(r)}\leqslant K$, т. е. $f(t)\in W^{r+1}LK$. Если же $f(t)\in W^{r+1}LK$, то легко проверить, что первообразная для $f^{(r+1)}(t)$, которая удовлетворяет условию (*), является r-й производной для $f(t)$. Таким образом, $f^{(r)}(t)$ абсолютно непрерывна и из (3) следует, что $f(t)\in W_*^rKH_L^1$.

Пусть $E_n(f)_L=\min\limits_{T_{n-1}}\|f-T_{n-1}\|_L$ — наилучшее приближение в метрике L функции $f(t)\in L$ при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Если H — некоторый класс функций из L, то полагаем

$$E_n(H)_L=\sup_{f\in H}E_n(f)_L \text{ и } M(H)_L=\sup_{f\in H}\|f\|_L.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При любом* $r\geqslant 0$ *и* $n=1,2,3,\ldots$

$$E_n(W^rKH_L^1)_L=\frac{4KM_{r+1}}{\pi\cdot n^{r+1}}, \tag{4}$$

где

$$M_{r+1} = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2i+1)\alpha - \frac{r\pi}{2} \right]}{(2i+1)^{r+2}} \right|, \tag{5}$$

а α — *число, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2i+1)\alpha - \frac{r\pi}{2} \right]}{(2i+1)^{r+1}} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. С. М. Никольским [1] для $r = 0, 1, 2, \ldots$ и В. К. Дзядыком [2] для любых $r > 0$ доказано, что

$$E_n (W^{r+1} LK)_L = \frac{4KM_{r+1}}{\pi n^{r+1}}.$$

Поэтому в силу леммы 2

$$E_n (W^r_* KH^1_L)_L = \frac{4KM_{r+1}}{\pi n^{r+1}}.$$

Покажем, что

$$E_n (W^r KH^1_L)_L = E_n (W^r_* KH^1_L)_L. \tag{7}$$

Функцию

$$\varphi_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} \varphi(x)\, dx$$

называют функцией Стеклова для $\varphi(t) \in L$ (см., например, [5, стр. 156]). Легко проверить, что для любой функции $f(t)$, имеющей r-ю производную в смысле Вейля, имеет место равенство

$$[f_h(t)]^{(r)} = [f^{(r)}(t)]_h,$$

т. е. r-я производная функции Стеклова для $f(t)$ совпадает с функцией Стеклова для r-й производной $f(t)$. Известно (см., например, [5, стр. 225]) что

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f_h = \| (f_h)' \|_L \leqslant \frac{1}{h}\, \omega_1(f, h) \tag{8}$$

и

$$\| f - f_h \|_L \leqslant \omega_1 \left(f, \frac{h}{2} \right). \tag{9}$$

Если $f(t) \in W^r KH^1_L$, то из (3), с учетом (8) и (1), получим, что при любом $t \in [0, \pi]$

$$\omega_1 (f^{(r)}_h, t) \leqslant \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f^{(r)}_h\, t \leqslant \frac{1}{h}\, \omega_1 (f^{(r)}, h)\, t \leqslant Kt,$$

а, значит, $f_h(t) \in W^r_* KH^1_L$. Из неравенства (9) следует, что $\lim\limits_{h \to +0} \| f_h \|_L = \| f \|_L$.

Так как $W^r KH^1_L \supset W^r_* KH^1_L$, то

$$E_n (W^r KH^1_L)_L \geqslant E_n (W^r_* KH^1_L)_L. \tag{10}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $f^*(t) \in W^r KH^1_L$ и $h > 0$ такие, что

$$E_n (W^r KH^1_L)_L - \varepsilon < \| f^* - T^*_{n-1} \|_L \leqslant \| f^* - \tau_{n-1} \|_L \leqslant$$
$$\leqslant \| f^* - f^*_h \|_L + \| f^*_h - \tau_{n-1} \|_L < E_n (W^r_* KH^1_L)_L + \varepsilon,$$

где $T_{n-1}^*(x)$ и $\tau_{n-1}^*(x)$ — полиномы наилучшего приближения соответственно для функций $f^*(x)$ и $f_h^*(x)$, являющейся функцией Стеклова для $f^*(x)$. В силу произвольности ε имеем: $E_n(W^r KH_L^1)_L \leqslant E_n(W_*^r KH_L^1)_L$, но если учесть неравенство (10), то равенство (7), а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

Теорема 2. *При любом* $r \geqslant 0$

$$M(W^r KH_L^1)_L = \frac{4KM_{r+1}}{\pi},$$

где M_{r+1} *определяется равенствами* (5) *и* (6).

Доказательство. В уже цитированных работах [1, 2] доказано, что

$$M(W^{r+1}LK)_L = \frac{4KM_{r+1}}{\pi}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$M(W_*^r KH_L^1)_L = \frac{4KM_{r+1}}{\pi}.$$

Для доказательства теоремы 2 остается убедиться в справедливости равенства

$$M(W^r KH_L^1)_L = M(W_*^r KH_L^1)_L. \tag{11}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $f^*(t) \in W^r KH_L^1$ и $h > 0$ такие, что

$$M(W^r KH_L^1)_L - \varepsilon < \| f^* \|_L < \| f_h^* \|_L + \varepsilon \leqslant M(W_*^r KH_L^1)_L + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем

$$M(W^r KH_L^1)_L \leqslant M(W_*^r KH_L^1)_L.$$

Учитывая включение $W^r KH_L^1 \supset W_*^r KH_L^1$ и последнее неравенство, получаем, что равенство (11) имеет место.

Замечание. Из (4) при $n = 1$ и теоремы 2 следует, что

$$E_1(W^r KH_L^1)_L = M(W^r KH_L^1)_L.$$

Пусть $s_n(f, x)$ и $\sigma_n(f, x)$ — соответственно суммы Фурье и Фейера порядка $n-1$ для функции $f(x)$ (см., например, [5, стр. 105 и 142]). Положим

$$\varepsilon_{s_n}(H)_L = \sup_{f \in H} \| f - s_n(f) \|_L \text{ и } \varepsilon_{\sigma_n}(H)_L = \sup_{f \in H} \| f - \sigma_n(f) \|_L.$$

Теорема 3. *При любом* $n = 2, 3, 4, \ldots$ *имеют место соотношения*

$$\varepsilon_{s_n}(W^r KH_L^1)_L = \frac{4K \lg n}{\pi^2 n^{r+1}} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

$$\varepsilon_{\sigma_n}(W^0 KH_L^1)_L = \frac{2K \lg n}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{13}$$

$$\varepsilon_{\sigma_n}(W^r KH_L^1)_L = \frac{4K}{\pi n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ir}}{(2i+1)^{r+1}} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) \quad (r = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Доказательство. В работе [1] получены значения величин $\varepsilon_{s_n}(W^{r+1}LK)_L$, $\varepsilon_{\sigma_n}(W^1 LK)_L$, $\varepsilon_{\sigma_n}(W^{r+1}LK)_L$, равные правым частям равенств

(12) — (14) соответственно. На основании леммы 2 при всех $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_{s_n}(W^r_* KH^1_L)_L = \varepsilon_{s_n}(W^{r+1}LK)_L \text{ и } \varepsilon_{\sigma_n}(W^r_* KH^1_L)_L = \varepsilon_{\sigma_n}(W^{r+1}LK)_L.$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно теперь убедиться в справедливости равенств

$$\varepsilon_{s_n}(W^r KH^1_L)_L = \varepsilon_{s_n}(W^r_* KH^1_L)_L \quad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

и

$$\varepsilon_{\sigma_n}(W^r KH^1_L)_L = \varepsilon_{\sigma_n}(W^r_* KH^1_L)_L \quad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Пусть $f(t) \in W^r KH^1_L$ и

$$U_n(f, \lambda_k, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(\lambda_k, t - x) f^{(r)}(t)\, dt,$$

где

$$K_n(\lambda_k, t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{k^r} \cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right).$$

Заметим, что $U_n(f, 1, x) = s_n(f, x)$ и $U_n\left(f, \frac{n-k}{n}, x\right) = \sigma_n(f, x)$. Из ограниченности ядер $K_n(\lambda_k, t)$ при каждом $n = 2, 3, 4, \ldots$ следует, что соотношение $\| U_n(f, \lambda_k, x) - U_n(f_h, \lambda_k, x) \|_L < \varepsilon$ выполняется, если только $\| f - f_h \|_L < \delta(\varepsilon)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют $f^*(t) \in W^r KH^1_L$ и $h > 0$ такие, что

$$\varepsilon_{s_n}(W^r KH^1_L)_L - \varepsilon < \| f^* - s_n(f^*) \|_L \leqslant \| f^* - f^*_h \|_L +$$

$$+ \| f^*_h - s_n(f^*_h) \|_L + \| s_n(f^*_h) - s_n(f^*) \|_L < \varepsilon_{s_n}(W^r_* KH^1_L)_L + \varepsilon.$$

Это значит, что $\varepsilon_{s_n}(W^r KH^1_L)_L \leqslant \varepsilon_{s_n}(W^r_* KH^1_L)_L$, причем в силу включения $W^r KH^1_L \supset W^r_* KH^1_L$ здесь может быть только знак равенства. Соотношение (15) доказано. Равенство (16) доказывается совершенно аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 10, 1946, 207—256.
2. В. К. Дзядык, О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, № 5, 6, 1959.
3. В. А. Матвеев, О вариации функций и о коэффициентах Фурье по системе Хаара и Шаудера, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 6, 1966.
4. Л. Г. Хомутенко, Точные оценки для коэффициентов Фурье по системе Хаара функций с ограниченным изменением, Математические заметки, т. 9, вып. 3, 1971.
5. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», М., 1965.

Поступила 13.IV 1971 г.

Днепропетровский государственный университет