УДК 517.53

Интегральное представление аналитических функций

В. К. Кочетков

В данной статье вводится интеграл типа Шварца и изучаются некоторые его свойства. Приводится пример функции, образующей ядро интеграла типа Шварца. Здесь же рассматривается деформация аналитических функций.

§ 1. Рассмотрим интеграл типа Шварца. Пусть

$$\omega_k,\ \omega_k = e^{i\alpha_k},\ -\alpha \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha,\ 0 < \alpha \leqslant \pi,\ |w| < 1,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

такая группа точек разветвления в плоскости ω функции $p(w, \omega)$, что обход любой замкнутой жордановой кривой, содержащей внутри указанные точки, не сможет изменить значений $p(w, \omega)$.

В этом случае во всякой области плоскости ω, содержащей только такие замкнутые жордановые кривые, внутренности которых либо не заключают ни одной точки разветвления ω_k, либо заключают всю группу точек ω_k, можно выделять однозначные ветви.

В дальнейшем предполагаем, что функция $p(w, \omega)$, $|w| < 1$, имеет в плоскости ω только указанную выше группу точек разветвления.

Обозначим через C_r дугу окружности $|\omega| = r$, $r < 1$, с концами в точках $e^{i\alpha}w$ и $e^{-i\alpha}w$, $w = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\omega = w \overline{\in} C_r$; через C_ϱ, $C_{\varrho=1} = C$, $r < \rho$, —окружность $|\omega| = \varrho$; через e_r — плоскость ω с разрезом вдоль C_r; l_r — замкнутый контур, образованный обоими берегами C_r.

Определение 1. Функция

$$p(w, \omega) = \gamma(w, \omega)/(\omega - w), \tag{1}$$

$$w = re^{i\varphi},\ \omega = \rho e^{i\theta},\ r < 1,\ \varrho > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

обладает свойством A, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $p(w, 0) = -1,\ p(w, \infty) = 1,\ w \neq 0;$ (2)

2) функция $\gamma(w, \omega)$ при каждом $w, |w| < 1$, как функция от ω, регулярна в e_r, исключая точку $\omega = \infty$, не являющейся ее точкой разветвления, и такая, что при $|w| < 1$, $|\omega| > 1$:

$$|p(w, \omega)| < D,\ D = \text{const},$$

$$\operatorname*{res}_{\omega=w} [p(w, \omega)/\omega] = 2; \tag{3}$$

3) функция $P(w, \omega)$ аналитична по w и непрерывна по ω для всех w из круга $|w| < |\omega| < \infty$ и всех ω, $|w| < |\omega| < \infty$, причем $p(0, \omega) = 1$, $\omega \neq 0$.

Примером функции, обладающей свойством A, как можно убедиться при помощи некоторых элементарных выкладок, является функция:

$$p(w, \omega) = -\frac{\omega w\,[(k(\omega + w)^2(1 - e^{i\alpha})^2 - (\omega - w)^2(1 + e^{i\alpha})^2]}{ke^{i\alpha}(\omega + w)^{1-\frac{2}{k}}(\omega - e^{i\alpha}w)^{\frac{1}{k}}(\omega - e^{-i\alpha})^{\frac{1}{k}}(\omega - w)} \times$$

$$\times\,((\omega - e^{i\alpha}w)^{1-\frac{1}{k}}(\omega - e^{-i\alpha}w)^{1-\frac{1}{k}}(\omega + w)^{\frac{2}{k}} - (\omega - w)^2)^{-1},$$

$$w = re^{i\varphi},\ \omega = \varrho e^{i\theta},\ 0 < k < \infty. \tag{4}$$

которая при $\alpha = \pi$ принимает вид $p_0(w, \omega) = (\omega + w)/(\omega - w)$.

Теорема. *Пусть функция $p(w, \omega)$ обладает свойством* A, *а $f(w)$ — функция, однозначная, регулярная в $|w| < 1$ и непрерывная в $|w| \leqslant 1$.*

Тогда для всякой точки w, $|w| < 1$, справедлива формула

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \operatorname{Re}[f(\omega)]\,p(w, \omega)\frac{d\omega}{\omega} + i\operatorname{Im}[f(0)] -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_r}\frac{f(\omega) + \overline{f(0)}}{2}\,p(w, \omega)\frac{d\omega}{\omega},\quad C = \{|\omega| = 1\}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть

$$f(w) = f(0) + a_1 w + \ldots = f(0) + T(w),\ T(w) = a_1 w + \ldots$$

Используя соотношение $\mathrm{Re}\,[f(w)] = (f(w) + \overline{f(0)})/2 + \overline{T(w)}/2$, рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \mathrm{Re}\,[f(\omega)]\, z(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \frac{f(\omega) + \overline{f(0)}}{2} z(\omega)\, d\omega + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \frac{\overline{T(\omega)}}{2} z(\omega)\, d\omega,\ \ r < \varrho < 1,\ z(\omega) = p(w, \omega)/\omega. \tag{6}$$

По теореме Коши для многосвязных областей, теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \frac{f(\omega) + \overline{f(0)}}{2} z(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_r} \frac{f(\omega) + \overline{f(0)}}{2} z(\omega)\, d\omega =$$

$$= \operatorname*{res}_{\omega=w} [(f(\omega) + f(0))\, z(\omega)/2] + \operatorname*{res}_{\omega=0} [(f(\omega) + \overline{f(0)})\, z(\omega)/2].$$

Используя (2), (4), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \frac{f(\omega) + \overline{f(0)}}{2} z(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_r} \frac{f(\omega)}{2} z(\omega)\, d\omega =$$

$$= f(w) + \overline{f(0)} - (f(0) + \overline{f(0)})/2 = f(w) - i\,\mathrm{Im}\,[f(0)]. \tag{7}$$

Заметим для дальнейшего, что на окружности $|\omega| = \rho$ имеет место соотношение $\overline{\omega} = \rho^2/\omega$.

Так как ряд $T(\omega)$ сходится в области $|\omega| < 1$, то ряд для

$$\overline{T(\omega)} = \bar{a}_1\bar{\omega} + \ldots = \bar{a}_1\varrho^2/\omega + \bar{a}_2\varrho^4/\omega^2 + \ldots = \bar{T}(\varrho^2/\omega)$$

сходится в области $|\varrho^2/\omega| < 1$, т. е. $|\omega| > \varrho^2$.

Возьмем окружность $|\omega| = R$ произвольного радиуса $R \geqslant 1$. По теореме Коши второй интеграл в правой части (6) равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varrho} \frac{\overline{T(\omega)}}{2} z(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{\overline{T(\omega)}}{2} z(\omega)\, d\omega. \tag{8}$$

Учитывая, что при больших $R\,|\overline{T(\omega)}| = |\bar{T}(\varrho^2/\omega)| < M/R$, $M = \mathrm{const}$, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} \frac{\overline{T(\omega)}}{2} z(\omega)\, d\omega\right| \leqslant \frac{M}{R}\,|p(w, \omega)| \leqslant \frac{M}{R} D.$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при стремлении R к бесконечности. Так как значение интеграла не зависит от R, то этот интеграл и, следовательно, интеграл в левой части (8) равен нулю.

Из (6)—(8) при $\varrho \to 1$ получаем результат, указанный в теореме. Теорема доказана.

Замечание. Пусть функция $\gamma(w, \omega)$ в (1) как функция от ω будет регулярной на всей плоскости ω, исключая точку $\omega = \infty$, не являющейся ее точкой разветвления. В этом случае $\gamma(w, \omega)$ — линейная функция от ω, а $p(w, \omega)$ имеет вид $p(w, \omega) = (a + b\omega)/(\omega - w)$; при (2), (4) получаем

$$p_0(w, \omega) = (\omega + w)/(\omega - w) \tag{9}$$

и интеграл (5) совпадает с известным интегралом Шварца.

2. Предположим, что множество функций $p(w, \omega)$, обладающих свойством А, есть параметрическое семейство функций $p(w, \omega; \sigma)$ параметра σ, определенного в промежутке $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma^0$. Пусть параметру $\sigma = \sigma_0$ соответствует ядро интеграла Шварца (9) $P_0(w, \omega) = p(w, \omega; \sigma_0) = (\omega + w)/(\omega - w)$.

Если функция $f(w)$ регулярна в круге $|w| < 1$ и непрерывна в $|w| \leqslant 1$, то по теореме данной работы имеем

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(w, e^{i\theta}; \sigma)\, d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{l_r} (f(\omega) + \overline{f(0)})\, p(w, \omega; \sigma)\frac{d\omega}{\omega} + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)] \tag{10}$$

и

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p_0(w, e^{i\theta})\, d\theta + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)], \tag{11}$$

где l_r зависит от функции $p(w, \omega; \sigma)$ и от w; $u(\omega) = \mathrm{Re}\,[f(\omega)]$.

из (10) и (11) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(w, e^{i\theta}; \sigma)\, d\theta + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)] =$$

$$= f(w) + \frac{1}{4\pi i}\int_{l_r} u(\rho e^{i\theta})\, p(w, \omega; \sigma)\frac{d\omega}{\omega} \tag{12}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p_0(w, e^{i\theta})\, d\theta + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)] = f(w).$$

Введя обозначения

$$f(w, \sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(w, e^{i\theta}; \sigma)\, d\theta + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)] \tag{13}$$

и

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{l_r} (f(\omega) + \overline{f(0)})\, p(w, \omega; \sigma)\frac{d\omega}{\omega} = \delta f,$$

из (12) имеем

$$f(w; \delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(w, e^{i\theta}; \sigma)\, d\theta + i\,\mathrm{Im}\,[f(0)] =$$

$$= f(w) + \delta f,\ u(\omega) = \mathrm{Re}\,[f(\omega)]. \tag{14}$$

Так как функция $p(w, \omega; \sigma)$ при каждом фиксированном σ аналитична по w, $|w| < 1$, и непрерывна по ω для всех w из $|w| < 1$ и для всех ω на окружности $|\omega| = 1$, то интеграл в (13) является аналитической в этой области функцией.

Таким образом, из (11) и (14) замечаем, что если оператор

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p_0(w, e^{i\theta})\, d\theta,\ \sigma = \sigma_0,$$

воспроизводит регулярную в $|w| < 1$ и непрерывную в $|w| \leqslant 1$ функцию $f(w)$ по ее вещественной части на $|w| = 1$, т. е. задание функции $u(\omega) = \operatorname{Re}[f(\omega)]$ на окружности $|w| = 1$ по (11) вполне определяет функцию $f(w)$ в круге $|w| < 1$, то оператор

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, p(w, e^{i\theta}; \sigma)\, d\theta, \quad \sigma \neq \sigma_0,$$

деформирует функцию $f(w)$ в функцию $f(w; \sigma)$, т. е. функция $f(w, \sigma)$ полностью определяется заданием вещественной части $u(\omega)$ на окружности $|\omega| = 1$ соответствующей функции $f(w)$, $f(w; \sigma) \neq f(w)$, $\sigma \neq \sigma_0$, и заданием ядра $p(w, \omega; \sigma)$.

Замечание. Кроме функции (4), можно привести и другие примеры функции $p(w, \omega)$, обладающей свойством A.

В заключение выражаю благодарность В. А. Зморовичу за внимание и ценные советы при написании статьи.

Поступила 18.V 1971 г.,
после переработки — 26.VII 1971 г.
Краснодарский политехнический институт