УДК 517.9

Приближенное решение задачи Коши методом полиномиальных операторов

С. А. Спасокукоцкая

В работе [1] был предложен метод, позволяющий по правой части уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и начальным условиям $y(x_0) = y_0$, с помощью линейных полиномиальных операторов $U_n(\psi;\ x)$ хорошего приближения непрерывных функций $\psi(x)$, строить обобщенные полиномы $y_n(x) = y_n(U_n;\ f;\ x)$, аппроксимирующие неизвестное решение $y(x)$ уравнения (1) по существу с такой же точностью, с которой операторы U_n могут приблизить это решение в случае, если оно задано явно.

Используя этот метод, в [2] было показано, что функция $\psi(x)$ разлагается в ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k T_k\left(\frac{2x}{h} - 1\right) \sim \psi(x), \tag{2}$$

в котором коэффициенты a_k определяются по формулам

$$a_k = \frac{4}{\pi h} \int_0^h \frac{T_k\left(\frac{2x}{h} - 1\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{h} - 1\right)^2}}\, \psi(x)\, dx \tag{3}$$

и через $T_k(t)$ обозначены полиномы Чебышева I рода:

$$T_k(t) = \cos k \arccos t, \tag{4}$$

в качестве U_n взяты частные суммы ряда (2), то при решении специального уравнения Риккати вида

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2 + Bx^{\alpha}, \; y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

приходим к обобщенному полиному $y_n(U_n; f; x; h)$, аппроксимирующему искомое решение $y(x)$. c_ν — коэффициенты этого полинома — находятся при произвольном n из системы $n+1$ нелинейных уравнений 2-й степени, которая может быть представлена в виде

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} Q_{ij}^k c_i c_j + \widetilde{H}_k = 0, \quad k = \overline{0, n}, \tag{6}$$

где c_i, c_j — неизвестные системы, Q_{ij} — коэффициенты системы, зависящие от параметра h, $\widetilde{H}_k$ — свободные члены. Обычно такие системы решаются итеративными методами [3], но последние имеют существенный недостаток, так как требуют начального подсчета, угадывания или физически обоснованного знания начального приближения.

В данной заметке к решению таких систем предлагается применение метода [4], который редуцирует исходную систему полиномов вида:

$$\mathfrak{M}_i\,(c_0, c_1, \ldots, c_m), \quad i = \overline{0, n}, \tag{7}$$

где через c_ν ($\nu = \overline{0, m}$) обозначены неизвестные, к системе

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_i\,(c_0, c_1, \ldots, c_m), \tag{8}$$

в которой один из полиномов $\widetilde{\mathfrak{M}}_s(c_\nu)$ представляет собой полином от одной переменной c_ν (все остальные переменные исключаются в процессе применения метода) в более высокой степени, чем исходная степень c_ν, оставшиеся n полиномов линеаризуются относительной каждой из последовательности переменных $c_0, c_1, \ldots, c_n$, для каждого нуля $\widetilde{\mathfrak{M}}_s(c_\nu)$.

Так как в данный момент нет методов, пригодных для вычислений таких систем с помощью простейших вычислительных устройств (исключая частные случаи), естественно рассмотреть применение ЭВМ.

Введем некоторые обозначения и приведем несколько теорем, используемых в дальнейшем.

Редуцированную систему $\widetilde{\mathfrak{M}}_i(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ будем называть результирующей системой.

Через $\mathfrak{M}_k^0$ будем обозначать коэффициент при c_0 в наивысшей степени в полиноме $\mathfrak{M}_k$, $D_k\mathfrak{M}_i$ — наивысшую степень c_k в полиноме $\mathfrak{M}_i$ ($i, k = \overline{0, n}$). Максимальную степень полинома $\mathfrak{M}_i$ сокращенно обозначим через d_i. Символ Θ будет обозначать полином от любого числа переменных, все коэффициенты которого равны нулю; считаем его полиномом, не имеющим степени.

Обычная теорема деления [5] утверждает, что для любых двух полиномов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, если $\mathfrak{M}_2 \not\equiv 0$, существуют полиномы Z и $\check{Z}$ такие, что $\check{Z} = \Theta$ или $D_1\check{Z} < D_1\mathfrak{M}_2$ и

$$\check{Z} = \mathfrak{M}_1\,(\mathfrak{M}_2^0)^{\mu} - \mathfrak{M}_2 Z, \tag{9}$$

где μ — некоторое целое число.

При доказательстве этой теоремы устанавливается, что если

$$D_0\mathfrak{M}_1 = \varepsilon_1, \quad D_0\mathfrak{M}_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2, \tag{10}$$

то величина $\check{Z}$ может быть найдена по формуле:

$$\check{Z}_i = \check{Z}_{i-1}\mathfrak{M}_2^0 - \mathfrak{M}_2 Z_i. \tag{11}$$

Положив $D_0\check{Z}_i = d_i$, получим

$$\check{Z}_i = (Z_{i-1})^0 c_0^{d_i-1-\varepsilon_2}. \tag{12}$$

Итерация начинается с $\hat{Z}_0 = \mathfrak{M}_1$ и кончается при $\check{Z} = Z_\varrho$, когда $D_1\check{Z}_\varrho < \varepsilon_2$ или $\check{Z}_\varrho = \Theta$.

В [4] теорема деления обобщена следующим образом.

Теорема. *Если полином $\mathfrak{M}_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ разделить на полином $x_0\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_n) - \mathfrak{M}^*(x_1, \ldots, x_n) = \mathfrak{M}_2$, то или $\check{Z} = \Theta$ или*

$$\mathfrak{M}_1\left(\frac{\mathfrak{M}^*(x_1, \ldots, x_n)}{\overline{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_n)}, x_1, \ldots, x_n\right) = \frac{\check{Z}(x_1, \ldots, x_n)}{[\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_n)]^\mu}. \tag{13}$$

Доказательство следует немедленно из теоремы деления с учетом того, что

$$Z = (\mathfrak{M}_{i-1})^0 x_0^{d_i-1-D_0\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_n). \tag{14}$$

Алгоритм Евклида порождает для двух полиномов $\mathfrak{M}_1 = \check{Z}_{i-2}$ и $\mathfrak{M}_2 = \check{Z}_{i-1}$ итеративную формулу вида:

$$\check{Z}_i = \check{Z}_{i-2}(Z_{i-1}^0)^{\mu_i} - \check{Z}_{i-1}Z_{i-1}. \tag{15}$$

При этом полагаем, что $D_1\mathfrak{M}_1 > D_2\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2 \neq \Theta$.

Если правая часть исходного уравнения (1) представляет собой полином произвольной степени по x и y, то редуцируемой системой (7) будет система, относительно переменных c_ν, вида

$$\mathfrak{M}_0^{(m)}, \mathfrak{M}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{M}_n^{(m)}, \tag{16}$$

где n — количество полиномов, m — количество переменных. Используя (15) и (13), согласно [4] приходим к системе

$$\mathfrak{M}_{0,1,\ldots,n}^{(m)}, \mathfrak{N}_{1,\ldots,n}^{(m-1)}, \ldots, C_n^{m-n+1}, \tag{17}$$

где через $\mathfrak{M}_{0,1,\ldots,n}^{(m)}$ обозначен наибольший общий делитель $\{\mathfrak{M}_i\}$, $\mathfrak{N}$ — элиминант алгоритма Евклида (рассматривается случай $m = n$). Результирующая система содержит только одно нелинейное уравнение $C_n^{m-n+1} = 0$ относительно одной переменной C_ν, степень которого не выше l^n, где l—максимальная степень полиномов системы (16) и n линейных уравнений для каждого нуля уравнения

$$C_n^{m-n+1} = 0. \tag{18}$$

Задача нахождения коэффицентов обобщенного полинома $y_n(U_n;\ f;\ x)$ свелась к задаче нахождения корней одномерного полинома C_n^{m-n+1}, причем, в частных случаях, когда корни (18) удается найти точно, указанный метод будет аналитическим и его погрешность будет зависеть только от погрешности вычислений, если (18) решается численно (см. [6, 7 и др.]), погрешность метода будет в основном зависеть от точности нахождения этих корней.

Проведенные исследования могут быть применены для нахождения приближенного решения систем дифференциальных уравнений с правой частью, представляющей собой полином произвольной степени с применением описанного метода, реализованного на БЭСМ-6; в том случае, если правая часть — произвольная функция, приходим для определения C_ν к нелинейным системам, которые могут быть решены методом спуска или методом Ньютона [8], а также методами, рассмотренными в [9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дзядык, О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Гаммерштейна, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 1, 1970.
2. С. А. Спасокукоцкая, Применение метода полиномиальных операторов к приближению решений дифференциальных уравнений специального вида, УМЖ, т. 24, № 5, 1972.
3. Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. L. H. Williams, Algebra of Polynomias in Several wariables for a Digital Computer, Jornal of the Association for computing machinery, **9**, N 1, 1962.
5. M. Bocher, Introduction to Higher Algebra, New York, 1907.
6. В. В. Воеводин, Численные методы алгебры, «Наука», М., 1969.
7. Р. В. Хемминг, Численные методы, «Наука», М., 1972.
8. Дж. Форсайт, К. Молер, Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, «Мир», М., 1969.
9. B. Wendroff, Theoretical Numerical Analysis, New York, Academic Press, 1966.
10. A. Ralston, A First Course in Numerical Analysis, New York, Mc. Craw — Hill Book Company, 1965.

Поступила 18.VII 1972 г.
Институт математики АН УССР