УДК 518.9.519.1

Об одном обобщении ядра графа

Л. П. Варвак

В статье вводится понятие квазиядра графа, указывается алгоритм построения всех квазиядер и ядер, находятся оценки их числа и изучается вид квазиядер на сумме графов.

Назовем квазиядром такое внутренне устойчивое множество (ВУМ) S', что $x \in S' \Leftrightarrow \Gamma(x) \subset \Gamma^{-}(S')$. Эквивалентное определение S' — ядро такого подграфа G', что $\Gamma(S') \subset X'$ и $x \notin X' \Rightarrow \Gamma(x) \subset X'$. Любое ядро является максимальным квазиядром в смысле теоретико-множественного упорядочения.

Рассмотрим минимальные квазиядра $k_1^0 \ldots k_{m_0}^0$, содержащиеся в S', в подграфе $\bar{G}$, где $\bar{X} = X \diagdown \left\{ \bigcup_{i=1}^{m_0} [k_i^0 \cup \Gamma^{-}(k_i^0)] \right\}$, $S' \cap \bar{X}$ — квазиядро; минимальные квазиядра, содержащиеся в $\bar{G}$, обозначим через $k_1^1 \ldots k_{m_1}^1$; продолжая этот процесс, получим ВУМ $k_j^i \subset S'$, каждое из которых содержится в одной сильно связной компоненте графа.

Функция $I(x): I(x) = 0$ при $x \in S'$, $I(x) = 1$ при $x \in \Gamma^{-}(S')$, $I(x) = \infty$ при $x \notin S' \cup \Gamma^{-}(S')$ удовлетворяет условиям 2—4 в [1] для игровых функций и условию 1': $I(x) = 0 \Rightarrow \Gamma(x) \subset \bigcup_{k<\infty} I^{-1}(2k)$.

Наоборот, четные значения функции, удовлетворяющей условиям 1' и 2—4, определяют квазиядро. Такая функция называется игровой функцией квазиядра.

Если задано множество $J^{-1}(0)$, то множества $J^{-1}(k)$ для $k \geqslant 1$ находятся по индукции:

$$I^{-1}(2k) = \left\{ x : \Gamma(x) \subset \bigcup_{l=0}^{k-1} I^{-1}(2l+1) \right\} \diagdown \bigcup_{m=0}^{2k-1} I^{-1}(m),$$

$$I^{-1}(2k+1) = \{x : \Gamma(x) \cap I^{-1}(2k) \neq \varnothing\} \diagdown \bigcup_{m=0}^{2k} I^{-1}(m).$$

Для каждого ВУМ T, удовлетворяющего условию $\Gamma(T) \subset \Gamma^{-}(T)$, функция $I(x)$, для которой $I^{-1}(0) = T$, определяет квазиядро $S' \supset T$. В этом случае T называется остовом S'; интерес представляют минимальные остовы.

Множество выигрышных вершин W графа G [2], если оно не пусто, является единственным минимальным квазиядром, причем соответствие $S' \to S' \cap D$ между квазиядрами графа и квазиядрами подграфа с множеством вершин D взаимно однозначно.

Рассмотрим стратегии σ и τ игроков при игре двух лиц на графе G. Условие $\Gamma(S')\subset\Gamma^{-}(S')$ и внутренняя устойчивость S' равносильны тому, что для любого $x\in S'$ любой стратегии τ и стратегии σ, для которой $y\in\Gamma^{-}(S')\Rightarrow$ $\Rightarrow\sigma(y)\in T$, след $\langle x,\tau,\sigma\rangle$ [2] не содержит контура нечетной длины. Так как при отсутствии тупиковых вершин след содержит бесконечное множество вершин, возможно повторяющихся, то справедливо первое утверждение леммы.

Лемма. *Для существования квазиядра у графа без тупиковых вершин необходимо наличие контура четной длины или пути бесконечной длины. Для существования ядра число таких непересекающихся контуров и путей должно быть не меньше мощности базы графа.*

Второе утверждение следует из того, что при наличии ядра S из любой вершины базы x исходят следы $<x,\tau,\sigma>$ при $x\in S$ и $<x,\sigma,\tau>$ при $x\in X\setminus S$, непересекающиеся по свойству базы [3].

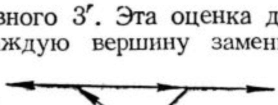
Рассмотрим граф, обладающий конечным числом r контуров четной длины и путей бесконечной длины, вершины которых занумеруем $(x_0^i, x_1^i\ldots$ $\ldots x_n^i)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$. Для построения всех квазиядер на первом шаге для каждого из них определим по индукции две функции $I_i^0(x_{2k})=I_i^1(x_{2k+1})=0$, которые распространим как игровые. Обозначим $W_i^\varepsilon=\bigcup\limits_{k<\infty}I^{-1}(2k)$, $L_i^\varepsilon=$ $=\bigcup\limits_{k<\infty}I^{-1}(2k+1)$. Если найдется вершина $x_{2k+\varepsilon}^i$, для которой $\Gamma(x_{2k+\varepsilon})\cap$ $\cap W_i^\varepsilon\neq\varnothing$, то полагается $W_i^\varepsilon=\varnothing$; если же для всех вершин $\Gamma(x_{2k+\varepsilon}^i)\subset$ $\subset L_i^\varepsilon$, то W_i^ε квазиядро.

На $(k+1)$-м шаге рассматриваем такие сочетания индексов $i_1^{\varepsilon_1}\ldots i_k^{\varepsilon_k}$ что для каждого $k-1$ набора из них

$$W_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\hat{\varepsilon}_j\ldots\varepsilon_k}\neq\varnothing,\quad \bigcup_{l\neq j}L_{i_1\ldots\hat{i}_l\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\hat{\varepsilon}_l\ldots\varepsilon_k}\bigcap W_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\hat{\varepsilon}_j\ldots\varepsilon_k}=\varnothing,$$

и полагаем $I_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}(x)=0$ для $x\in\bigcup\limits_{j=1}^{k}W_{i_1\ldots\hat{i}_j\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\hat{\varepsilon}_j\ldots\varepsilon_k}$ после чего находим множества $W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$ и $L_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$. Если существует вершина $x_{2k+\varepsilon_j}\in W_{\cdot j}^{\varepsilon_j}$, для которой $\Gamma(x_{2k+\varepsilon_j})\cap W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}\neq\varnothing$, то полагаем $W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}\neq\varnothing$; если для всех таких вершин $\Gamma(x_{2k+\varepsilon_j})\subset L_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$, то $W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$ квазиядро.

На $r+1$ шаге получим все квазиядра вида $W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$. Используя лемму, индукцией по числу контуров четной и путей бесконечной длины, содержащихся в любом квазиядре S', доказывается, что оно совпадает с одним из $W_{i_1\ldots i_k}^{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k}$.

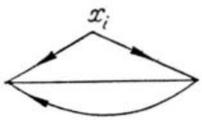
Соответствие между квазиядрами и частичными функциями на множестве $\{1,2,\ldots r\}$ со значениями 0, 1 будет однозначно, если потребовать $f(i)=1\Leftrightarrow\{x_0^i x_2^i\ldots x_{2k_i}^i\ldots\}\subset S$, $f(i)=0\Leftrightarrow\{x_1x_3\ldots x_{2k+1}\}\in S$. Поэтому число квазиядер не больше числа таких функций, равного 3^r. Эта оценка достигается, если в полном r-вершинном графе каждую вершину заменить контуром четной длины, а каждое ребро — подграфом 

Для оценки числа максимальных квазиядер найдем максимальное число частичных функций, не являющихся продолжениями друг друга. Заметим, что каждая функция из A_k -класса функций, определенных на

k элементах, имеет $2(r-k)$ продолжений из класса A_{k+1} и k сужений из A_{k-1}. По теореме о паросочетаниях [3] при $k+1<2(r-k)$, т. е. при $k<\frac{2r-1}{3}$ существует паросочетание из A_k в A_{k+1}, сопоставляющее каждой функции одно из ее расширений, а при $k>\frac{2r+1}{3}$ существует паросочетание из A_k в A_{k-1}, сопоставляющее каждой функции ее сужение.

Докажем существование паросочетания любой совокупности функций M, не являющихся продолжением друг друга, в $A_{\bar{k}}$, где $\bar{k}=\left[\frac{2r+1}{3}\right]$. Если $\max\{k : M\cap A_k\neq\varnothing\}=k_1>\frac{2r+1}{3}$, то заменим функции из $M\cap A_{k_1}$ их образами при паросочетании $A_{k_1}\to A_{k_1-1}$; ввиду максимальности k_1 функции полученной совокупности не являются продолжениями друг друга.

Аналогично, при $\min\{k : M\cap A_k\neq\varnothing\}=k_2<\frac{2r-1}{3}$ заменим функции из $M\cap A_{k_2}$ их образами при паросочетании $A_{k_2}\to A_{k_2+1}$. Повторяя эти рассуждения, получим искомое паросочетание. Поэтому класс $A_{\bar{k}}$, содержащий $C_r^{\bar{k}}\cdot 2^{\bar{k}}$, является максимальным. Точность этой оценки подтверждает пример графа, обладающего $C_r^{\bar{k}}\cdot 2^{\bar{k}}$ ядрами: каждый из r графов вида



соединяется с вершинами $z_{i_1\ldots i_{\bar{k}}}$ следующим образом: $\Gamma(x_i)=\bigcup z_{i_1\ldots i_k}$, где объединение берется по всем сочетаниям $(i_1\ldots i_{\bar{k}})\subset\{1\ldots r\}\setminus\{i\}$, а вершины $z_{i_1\ldots i_{\bar{k}}}$ соединяются с вершинами $x_i : \Gamma(z_{i_1\ldots i_{\bar{k}}})=\bigcup_{j=1}^{\bar{k}} x_{i_j}$.

Характеристические вектора $(y_1\ldots y_n)$ квазиядер конечного графа с n вершинами удовлетворяют системе булевых уравнений

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j=0,\quad y_i=\bigcap_{j=1}^{n}\left(\bar{a}_{ij}\bigcup_{k=1}^{n} a_{jk}y_k\right).$$

Эта система эквивалентна псевдобулевому уравнению [4]

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i\prod_{k=1}^{n}(1-a_{jk}y_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[(1-y_i)\prod_{j=1}^{n}\left(1-a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}y_k\right)\right]=0.$$

Так как для максимальных множеств, удовлетворяющих условиям $\Gamma(S)\cap\cap S=\varnothing$ и $x\in S\Rightarrow\Gamma(x)\subset\Gamma^{-}(S)$, справедливо $\Gamma(x)\subset\Gamma^{-}(S)\Rightarrow x\in S$, то характеристические вектора максимальных квазиядер максимизируют задачу булевого программирования [4].

$$f(y_1\ldots y_n)=\sum_{i=1}^{n} y_i-(n+1)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i\left[y_j+\prod_{k=1}^{n}(1-a_{jk}y_k)\right]$$

при ограничении $f(y_1\ldots y_n)\geqslant 0$, причем абсолютный максимум равен мощности наибольшего квазиядра.

Аналогично методу Мого—Вейсмана для ядер [5] существует взаимно однозначное соответствие между сомножителями A_k минимальной дизъюнктивной нормальной формы булевого выражения $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(\bar{a}_{ij} \cup z_i \cup [z_j \cap a_{jk} z_k]$ и максимальными квазиядрами: $z_i \not\in A_k \Leftrightarrow x_i \in S_k$.

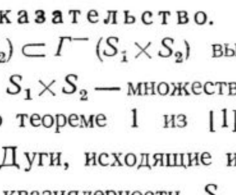
Для нахождения квазиядра на сумме графов определим обобщенную функцию Гранди $R^S(x)$ квазиядра S, как обобщенную функцию Гранди [6] суграфа $\widetilde{G}$, получающегося из G удалением дуг, исходящих из S.

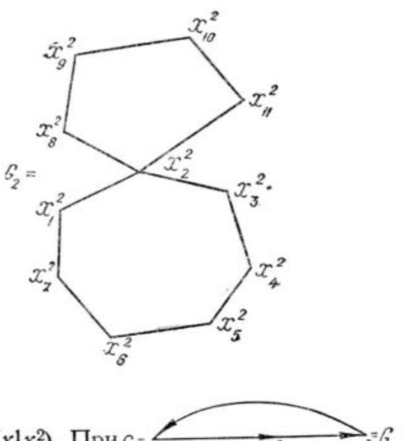
Теорема. *Множество* $S = \{(x_1 x_2) : R_1^{S_1}(x_1) \dotplus R_2^{S_2}(x_2) = 0\}$ *является минимальным квазиядром на* $G = G_1 + G_2$, *содержащим* $S_1 \times S_2$. *Если* T_1 *и* T_2 — *минимальные остовы* S_1 *и* S_2, то $(S_1 \times T_2) \cup (T_1 \times S_1)$ — *минимальный остов* S.

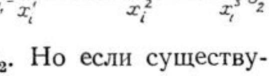
Доказательство. Внутренняя устойчивость $S_1 \times S_2$ и условие $\Gamma(S_1 \times S_2) \subset \Gamma^-(S_1 \times S_2)$ вытекают из аналогичных условий для S_1 и S_2. Так как $S_1 \times S_2$ — множество тупиковых вершин суграфа $\widehat{G} = \widetilde{G}_1 + \widetilde{G}_2$ графа G, то по теореме 1 из [1] $S = \overline{W}$ — минимальное квазиядро, содержащее $S_1 \times S_2$. Дуги, исходящие из $[(X_1 \setminus S_1) \times S_2] \cup [S_1 \times (X_2 \setminus S_2)] \subset \widehat{L} \cup \widehat{D}$, не нарушают квазиядерности S, а в силу условия $\Gamma(S_1 \times S_2) \subset \Gamma^-(S_1 \times S_2) \subset \widehat{L}$ этим же свойством обладают дуги, исходящие из $S_1 \times S_2$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что T—минимальный остов квазиядра S, если $(\exists\sigma)(\exists\tau)(\forall\tau)(\forall y)(\forall x)(\forall z)\{[y \in \Gamma^-(S) \Rightarrow \Rightarrow \sigma(y) \in S] \Rightarrow [(x \in S \Rightarrow \langle x\tau\sigma\rangle \cap T \neq \varnothing) \wedge (z \in T \Rightarrow \overline{\langle x\tau\sigma\rangle} \ni x)]\}$, где $\overline{\langle x\tau\sigma\rangle}$ обозначает все вершины следа $\langle x\tau\sigma\rangle$ за исключением начальной. Стратегией σ для $(S_1 \times T_2) \cup (T_1 \times S_2)$ будет выигрышная стратегия на $\widehat{G}$ при $x \in \Gamma^-[S \setminus (S_1 \times \times S_2)]$, стратегия σ_1 при $x \in \Gamma_1^-(S_1) \times S_2$ и σ_2 при $x \in S_1 \times \Gamma_2^-(S_2)$, где σ_1 и σ_2 — соответствующие стратегии для S_1 и S_2, а стратегией τ будет τ_1 при $x \in T_1 \times S_2$ и τ_2 при $x \in S_1 \times T_2$.

В общем случае для существования квазиядер (ядер) на сумме и произведении графов существование квазиядер на слагаемых и сомножителях не является необходимым. Например, на $G = G_1 \times G_2$, где





существует квазиядро, содержащее вершину $(x_1^1 x_1^2)$. При 

множество $\{(x_1^2 x_2^1) \cup (x_1^1 x_2^2) \cup (x_1^3 x_2^3)\}$ есть ядро на $G_1 + G_2$. Но если существует квазиядро S на $G = G_1 + G_2$ и одно из слагаемых, скажем G_2, прогрессивно конечно, то для каждой тупиковой вершины x_2 множество $S_1^{x_2} = \{x_1 : (x_1 x_2) \in S\}$ квазиядро на G_1. С учетом условия $\Gamma(S) \subset \Gamma^-(S)$ индукцией по значению порядковой функции показывается, что для каждой вершины x_2 множество $S_1^{x_2}$ — квазиядро на графе $\widehat{G}_1^{x_2}$ с множеством вершин $\widehat{X}_1^{x_2} = \left\{ \left[\bigcup_{y_2 \in \Gamma_2(x_2)} \Gamma_1^{-} (S_1^{y_2}) \right] \right\}$, содержащее $\widehat{W}_1^{x_2}$. Наоборот, любое отображение X_2 в множество внутренне устойчивых подмножеств графа G_1, удовлетворяющее этому условию, определяет квазиядро графа $G_1 + G_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Варвак, Игры на сумме графов, Кибернетика, № 1, 1968.
2. К. Берж, Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, М., 1961.
3. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962.
4. P. L. Hammer (Ivanescu), A. Redeanu, Boolean Methods in operator, research and related areas, Springer verlag, 1968.
5. А. А. Зыков, Теория конечных графов. I, «Наука», СОАНСССР, Новосибирск, 1969.
6. Л. П. Варвак, Об одном обобщении функции Гранди, Кибернетика, № 5, 1970.

Поступила 12.III 1971 г.

Киевский инженерно-строительный институт