УДК 517.911

Инвариантные множества систем с мгновенным изменением в стандартной форме

А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с мгновенным изменением:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \text{ при } t \neq t_i(x),$$
$$\Delta x|_{t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots;\ t_i(x) < t_{i+1}(x)), \tag{1}$$

удовлетворяющую условиям:

а) $X(t, x), I_i(x), \dfrac{\partial t_i}{\partial x}$ — непрерывные функции своих аргументов, удовлетворяющие условию Липшица по x в области

$$t \in [0, \infty),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset E_n; \tag{2}$$

б) равномерно по t, x при $t \geqslant 0$, $x \in D$ существуют конечные пределы

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x)\, dt = X_0(x), \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{T<t_i<t+T} I_i(x) = I_0(x),$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t<t_i<t+T} 1 = d. \tag{3}$$

Для таких систем в [1, 2] дается обоснование метода усреднения, выясняется вопрос о величине разности между точным решением системы (1) и его приближением — решением усредненной системы, соответствующей системе (1), изучается поведение решений системы (1) в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия соответствующей усредненной системы. В частности, доказана теорема, являющаяся аналогом известного результата Н. Н. Боголюбова [3, 4], относящегося к обоснованию метода усреднения.

Теорема 1 [2]. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* а), б) *и* в) *соответствующая ей усредненная система*

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon\,[X_0(\bar{x}) + I_0(\bar{x})] \tag{4}$$

имеет решение $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x_0)$, $\bar{x}(0, x_0) = x_0$, которое при $\varepsilon = 1$ принадлежит области D для $t \in [0, L]$, $L < \infty$, вместе с некоторой своей ρ-окрестностью и удовлетворяет неравенствам

$$\left(\frac{\partial t_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0))}{\partial x}, I_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0))\right) \leqslant \beta < 0 \quad (t_i' < t < t_i'') \left(\text{либо } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right), \tag{5}$$

где $t_i' = \inf\limits_{x\in D} t_i(x)$, $t_i'' \sup\limits_{x\in D} t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $t_d < \dfrac{L}{\varepsilon} < t_{d+1}$.

Тогда для любого $\eta > 0$ можно указать такое ε_0, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ система (1) *имеет решение $x_t(x_0)$, $x_0(x_0) = x_0$, определенное при $t \in \left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ и такое, что*

$$|x_t(x_0) - \bar{x}(\varepsilon t, x_0)| \leqslant \eta \text{ при } t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]. \tag{6}$$

В [2] рассматривается также поведение решений системы (1) в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия усредненной системы.

Будем предполагать, что усредненная система (4) имеет периодическое с периодом 2π по ωt решение $\bar{x} = \bar{x}^*(\omega t)$. Пусть C — замкнутая кривая, определяемая вектор-функцией $\bar{x}^*(\omega t)$ в пространстве E_n, т. е.

$$C = \{x \in D: x = \bar{x}^*(\varphi) = \bar{x}^*(\varphi + 2\pi)\}. \tag{7}$$

Будем считать, что кривая C принадлежит области D вместе со своей ρ-окрестностью, где под ρ-окрестностью кривой C будем понимать множество точек $x \in D$, для которых выполняется неравенство

$$d(x, C) < \rho. \tag{8}$$

Под расстоянием между точкой $x \in D$ и кривой C надо понимать

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} |x - y|. \tag{9}$$

В дальнейшем будем исследовать поведение решений системы (1) в окрестности C в случае, когда периодическое решение $\bar{x} = \bar{x}^*(\omega t)$ является асимптотически орбитально устойчивым.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* а) *и* б). *Тогда, если система* (4) *имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение* $\bar{x} = \bar{x}^*(\omega t)$ *и*

$$\left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}, I_i(x)\right) \leqslant \beta < 0 \left(\text{либо } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right) \tag{10}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots$ *и всех* x *из некоторой* ρ_0*-окрестности кривой* C, *то существует такая* ρ*-окрестность* D_ϱ $(\rho \leqslant \rho_0)$ *этой кривой и такое* $\varepsilon^0 > 0$, *что при всех* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ *и всех* $x \in D_\varrho$ *решения* $x_t(x)$, $x_0(x) = x$ *системы* (1) *равномерно ограничены при* $t \in [0, \infty)$.

Доказательство. Пусть $\bar{x}(t, x)$, $\bar{x}(0, x) = x$ — решение усредненной системы (4) при $\varepsilon = 1$. Поскольку $\bar{x} = \bar{x}^*(\omega t)$ является асимптотически орбитально устойчивым, то из этого и непрерывной зависимости от начальных условий следует существование такого ρ', что

$$d(\bar{x}(t, x), C) \leqslant \rho_0 \text{ при } d(x, C) \leqslant \rho', \ t \geqslant 0. \tag{11}$$

Неравенство (11) с учетом (10) показывает, что для решений $\bar{x}(\varepsilon t, x)$ при

$$x \in T_{\varrho'} = \{x \in D : d(x, C) \leqslant \rho'\} \tag{12}$$

выполняется условие в) теоремы 1 при всех $t \geqslant 0$. Учитывая эту теорему, можно указать такое $\varepsilon^0 = \varepsilon^0(L, \rho)$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$, всех $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$ и некоторого $\rho\,(\rho \leqslant \rho_0, \rho \leqslant \rho')$

$$|x_{t+\tau}(\tau, x) - \bar{x}(\varepsilon t, x)| \leqslant \frac{\rho}{2}, \tag{13}$$

где $x_{t+\tau}(\tau, x)$ — решение системы (1), проходящее при $t = 0$ через точку $x \in T_\varrho$.

Выберем ρ так, чтобы T_ϱ принадлежало области асимптотической устойчивости кривой C, а L так, чтобы

$$d(\bar{x}_t(x \in T_\varrho), C) \leqslant \frac{\rho}{2} \text{ при } t \geqslant L. \tag{14}$$

Учитывая неравенства (11) — (13), получаем оценки

$$d(x_{t+\tau}(x\in T_{\varrho},\tau),C)\leqslant|x_{t+\tau}(x\in T_{\varrho},\tau)-\bar{x}(\varepsilon t,x\in T_{\varrho})|+$$

$$+d(\bar{x}(\varepsilon t,x\in T_{\varrho}),C)\leqslant\frac{\rho}{2}+\rho_0 \text{ при } t\in\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right), \tag{15}$$

$$d(x_{\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),C)\leqslant\rho,$$

последняя из которых означает, что

$$x_{\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0)\in T_{\varrho}. \tag{16}$$

Учитывая (16), а также то, что

$$x_{t+\tau}(x,0)=x_{t+\tau}(x_{\tau}(x,0),\tau), \tag{17}$$

имеем

$$x_{t+\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0)=x_{t+\frac{L}{\varepsilon}}\left(x_{\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),\frac{L}{\varepsilon}\right)=x_{t+\frac{L}{\varepsilon}}\left(x'\in T_{\varrho},\frac{L}{\varepsilon}\right),$$

откуда, с учетом (15), следует

$$d(x_{t+\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),C)\leqslant\frac{\rho}{2}+\rho_0 \text{ при } t\in\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right),\ d(x_{2\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),C)\leqslant\rho. \tag{18}$$

Последнее из неравенств (18) доказывает, что $x_{2\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0)\in T_{\varrho}$ и ведет к оценкам

$$d(x_{t+k\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),C)\leqslant\frac{\rho}{2}+\rho_0,\qquad d(x_{(k+1)\frac{L}{\varepsilon}}(x\in T_{\varrho},0),C)\leqslant\rho \tag{19}$$

при $t\in\left[0,\frac{L}{\varepsilon}\right),\quad k=0,1,2,\ldots$.

Неравенства (19) означают, что

$$d(x_t(x\in T_{\varrho}),C)\leqslant\frac{\rho}{2}+\rho_0 \tag{20}$$

для всех $t\in[0,\infty)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 обеспечивает существование ограниченных при $t\geqslant 0$ решений системы (1). Выясним, когда эта система имеет решения, ограниченные при всех $-\infty<t<\infty$.

Пусть система (1) удовлетворяет условиям а) и б) как при $t\geqslant 0$, так и при $t<0$.

Положим

$$I_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T}I_i(x),\text{ при } t\geqslant 0,\ I^0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t-T<t_i<t}I_i(x)\text{ при } t<0. \tag{21}$$

Предположим, что усредненная при $t\geqslant 0$ система

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\varepsilon[X_0(\bar{x})+I_0(\bar{x})] \tag{22}$$

имеет асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение $\bar{x}=\bar{x}^*(\omega t)$ и для x из некоторой ρ_0-окрестности кривой C, определяемой (7), выполняется неравенство (5).

Пусть в ρ-окрестности D_ϱ кривой C, указанной в теореме 2, усредненная при $t \leqslant 0$ система

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \varepsilon\,[X_0(\bar{x}_1) + I^0(\bar{x}_1)] \tag{23}$$

имеет периодическое решение $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^*(\omega_1 t)$. Обозначим кривую, определяемую в E_n этим решением, через C_1

$$C_1 = \{x \in D\colon x = \bar{x}_1^*(\varphi) = \bar{x}_1^*(\varphi + 2\pi)\} \tag{24}$$

и предположим, что

$$\left(\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}, I_i(x)\right) \leqslant \beta < 0 \quad \left(\text{либо } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right) \tag{25}$$

для всех $i = -1, -2, \ldots$ и всех x из некоторой ρ_0'-окрестности кривой C_1.

При выполнении перечисленных выше условий имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если периодическое решение $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^*(\omega_1 t)$ системы (23) асимптотически орбитально неустойчиво (асимптотически орбитально устойчиво при $t < 0$), то найдется такое $\varepsilon^0 > 0$ и такая область D_{ϱ_1}, содержащая C и C_1, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ все решения $x_t(x)$, для которых $y \in D_{\varrho_1}$, равномерно ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$.*

Если же периодические решения $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^*(\omega_1 t)$ системы (23) асимптотически орбитально устойчиво, то найдется такое $\varepsilon^0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ система (1) имеет инвариантное множество.

Доказательство. Пусть решение $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^*(\omega_1 t)$ асимптотически орбитально неустойчиво. Применяя теорему 2 для интервалов $t \geqslant 0$ и $t \leqslant 0$, убеждаемся, что существуют соответственно ρ- и $\bar{\rho}$-окрестности кривых C и C_1 такие, что

$$|x_t(x \in D_\varrho)| \leqslant m_1 \text{ при } t \in [0, \infty), \tag{26}$$

$$|x_t(x \in T_{\bar{\varrho}})| \leqslant m_2 \text{ при } t \in (-\infty, 0]. \tag{27}$$

Так как $C_1 \subset D_\varrho$, то множество $D_\varrho \cap T_{\bar{\varrho}} = D_{\varrho_1}$ не пусто, а, следовательно,

$$|x_t(x \in D_{\varrho_1})| \leqslant m = \max(m_1, m_2) \text{ при } t \in (-\infty, \infty). \tag{28}$$

Пусть теперь решение $\bar{x}_1 = \bar{x}_1^*(\omega_1 t)$ асимптотически орбитально устойчиво. Применяя к системе (1) теорему 1, убеждаемся, что решение $x_t(x \in T'_{\varrho_1}, \tau)$ существует для $t \in \left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right]$ и для него верны оценки вида (15), (16), т. е.

$$d(x_{t+\tau}(x \in T_{\varrho_1'}, \tau), C_1) \leqslant \frac{\rho_1'}{2} + \rho_1^0 \tag{29}$$

при $t \in \left[0, \dfrac{L}{\varepsilon}\right)$, $\tau \geqslant -\dfrac{L}{\varepsilon}$,

$$d\left(x_0\left(x \in T_{\varrho_1'}, -\frac{L}{\varepsilon}\right), C_1\right) \leqslant \rho_1', \tag{30}$$

где

$$T_{\varrho_1'} = \{x \in D : d(x, C_1) \leqslant \rho_1'\}. \tag{31}$$

Неравенства (29) и (30) приводят к оценкам

$$d\left(x_{t-k\frac{L}{\varepsilon}}\left(x\in T_{\varrho_1'},-k\frac{L}{\varepsilon}\right),C_1\right)\leqslant\frac{\rho_1'}{2}+\rho_1^0,\quad d\left(x_0\left(x\in T_{\varrho_1'},-k\frac{L}{\varepsilon}\right),C_1\right)\leqslant\rho_1' \tag{32}$$

при $t\in\left(-k\frac{L}{\varepsilon},0\right]$ $(k=1,2,\ldots)$.

Возьмем теперь в $T_{\varrho_1'}$ замкнутую кривую без самопересечений γ_0 и пусть ее параметрическое представление будет $x=\widetilde{x}(\theta)$, т. е.

$$\gamma_0=\{x\in T_{\varrho_1'}:x=\widetilde{x}(\theta)=\widetilde{x}(\theta+2\pi)\}. \tag{33}$$

В силу (32) имеем

$$d\left(x_0\left(x\in\gamma_0,-k\frac{L}{\varepsilon}\right),C_1\right)\leqslant\rho_1',\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{34}$$

т. е. все кривые

$$\gamma_k=\left\{x\in T_{\varrho_1'}:x=x_0\left(x\in\gamma_0,-k\frac{L}{\varepsilon}\right)=\widetilde{x}_k(\theta)\right\}, \tag{35}$$

получаемые из γ_0 путем сдвига γ_0 на $k\frac{L}{\varepsilon}$ по траекториям системы (1), принадлежат $T_{\varrho_1'}$.

Таким образом, имеем последовательность непрерывных периодических по θ с периодом 2π функций

$$\widetilde{x}_k(\theta)=x_0\left(x\in\gamma_0,-k\frac{L}{\varepsilon}\right), \tag{36}$$

принадлежащих $T_{\varrho_1'}$. В силу компактности $T_{\varrho_1'}$ для каждого θ можно выбрать из $\{x_k(\theta)\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}(\theta)\}$ и, таким образом, получить некоторое предельное множество M_ε.

Покажем, что решения системы (1), начавшиеся при $t=0$ из точки $x\in M_\varepsilon$, т. е. $x_t(x\in M_\varepsilon,0)$ существуют для $t\in(-\infty,\infty)$ и что они ограничены. Убедимся вначале в том, что эти решения определены при $t\in(-\infty,0]$ и ограничены. В самом деле, последовательность решений $x_t\left(x\in\gamma_0,-k\frac{L}{\varepsilon}\right)$, определенная при $-k\frac{L}{\varepsilon}\leqslant t\leqslant 0$, равномерно ограничена при $k=1,2,\ldots$, поскольку совпадает с последовательностью

$$x_{\bar{t}-k\frac{L}{\varepsilon}}\left(x\in\gamma_k,-k\frac{L}{\varepsilon}\right)\ \text{при}\ \bar{t}\in\left[-k\frac{L}{\varepsilon},0\right]. \tag{37}$$

Предположим, что при некотором $t=t^0<0$

$$d\left(x_t(x\in M_\varepsilon),C_1\right)<\frac{\rho_1'}{2}+\rho_1^0. \tag{38}$$

Так как $x_t(x\in M_\varepsilon)$ — кусочно-непрерывная функция переменного t на любом интервале, то из того, что неравенство (38) имеет место при $t=t^0$ следует, что оно имеет место и для некоторого интервала $[t_0,t_0']$, являющегося интервалом непрерывности для $x_t(x\in M_\varepsilon)$.

Так как точки разрыва решения $x_t\,(x \in M_\varepsilon)$ непрерывно зависят от x на конечном интервале времени, то можно выбрать такое $\tau_1 \in [t_0, t_0']$, чтобы

$$x_{\tau_1}\,(x \in \gamma_k) \to x_{\tau_1}\,(x \in M_\varepsilon) \text{ при } k \to \infty. \tag{39}$$

Тогда соотношение (39) приводит к неравенству

$$d\,(x_{\tau_1}\,(x \in \gamma_k), C_1) > \frac{\rho_1'}{2} + \rho_1^0 \tag{40}$$

при всех достаточно больших k. Но (40) противоречит (32), так как

$$x_{\tau_1}\left(x \in \gamma_0, -k\,\frac{L}{\varepsilon}\right) = x_{\bar{\tau}-k\frac{L}{\varepsilon}}\left(x \in \gamma_k, -k\,\frac{L}{\varepsilon}\right). \tag{41}$$

Противоречие доказывает, что $x_t\,(x \in M_\varepsilon)$ ограничено при $t \in (-\infty, 0]$. Но так как $x \in M_\varepsilon \subset D_\varrho$, то согласно теореме 2 $x_t\,(x \in M_\varepsilon)$ ограничено и при $t \geqslant 0$, а следовательно, оно ограничено при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Самойленко, Колебания в системах с толчками, IV конференция по нелинейным колебаниям, Прага, 1967.
2. А. М. Самойленко, Метод усреднения в системах с толчками, Математическая физика, вып. 9, «Наукова думка», К., 1971.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
4. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1971.

Поступила 28. XII 1971 г.

Институт математики АН УССР