УДК 517.941

К вопросу о применимости преобразования Лапласа к исследованию линейных стохастических систем

В. М. Алексеев

Исследуется система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}(t, \omega) = [A + \mu B(t, \omega)]\, Y(t, \omega), \; Y(0) = E. \tag{1}$$

Здесь $\omega \in \Omega$, $\{\Omega, U, P\}$ — вероятностное пространство [1], $Y(t, \omega)$ — вектор, μ — параметр ($\mu < 1$), A — постоянная устойчивая [2] матрица размера $n \times n$, характеристические значения которой имеют вид $i\omega_k$ (некоторые ω_k могут равняться нулю), элементы матрицы $B(t, \omega)$— вещественные, стационарные и стационарно-связанные в широком смысле случайные процессы, удовлетворяющие следующим ограничениям [3]:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{s-1}} dt_s \left\| M\left\{ B(t, \omega) \prod_{k=1}^{s} B(t_k, \omega) \right\} \right\| < \infty, \tag{2}$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \| M\{B(t, \omega)\}\|$ существует.

Принимаем следующие обозначения: $\|\cdot\|$ — норма матрицы, $M\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $(*)$ —транспонирование, $(\overline{\cdot})$ — комплексное сопряжение, $\delta(u)$ — функция Дирака, $(\leftrightarrow)$ — знак соответствия между функцией и ее изображением по Лапласу.

Как известно [4], матрица $B(t, \omega)$ имеет спектральное разложение

$$B(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, dC(u, \omega); \quad dC(-u, \omega) = -\overline{dC(u, \omega)}. \tag{3}$$

Для элементов $c_{kj}(u, \omega)$ матрицы $C(u, \omega)$ выполнены соотношения:

$$M\{dc_{kj}(u, \omega)\overline{dc_{pm}(u_1, \omega)}\} = s_{kp}^{jm}(u)\,\delta(u - u_1)\, du du_1, \tag{4}$$

где $s_{kp}^{jm}(u)$ — взаимные спектральные плотности. Применим к системе (1) преобразование Лапласа, учитывая (3). Используя теорему о смещении [5], придем к системе разностных уравнений

$$(Ep - A)\, F(p, \omega) = E + \mu \int_{-\infty}^{\infty} dC(u, \omega)\, F(p - iu, \omega). \tag{5}$$

Здесь

$$F(p, \omega) \leftrightarrow Y(t, \omega), \quad M\{F(p, \omega)\} \leftrightarrow M\{Y(t, \omega)\}. \tag{6}$$

В системе (5) делаем замену со случайными коэффициентами

$$F(p,\omega)=Z(p,\omega)+\mu(Ep-A)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}dC(-u_1\omega)\,Z(p+iu_1,\omega). \qquad (7)$$

Приходим к системе разностных уравнений, в которой отсутствуют члены порядка μ:

$$(Ep-A)\,Z(p,\omega)=E-\mu^2\int\int_{-\infty}H(p,u,u_1,\omega)\,Z(p-iu+iu_1,\omega), \qquad (8)$$

где

$$H(p,u,u_1,\omega)=dC(u,\omega)\,[E(p-iu)-A]^{-1}\,dC(-u_1,\omega). \qquad (9)$$

Усредняя по Ω с учетом (4), получим

$$M\{H(p,u,u_1,\omega)\}=\delta(u-u_1)\,H(p,u)\,du\,du_1, \qquad (10)$$

где элементы матрицы $H(p,u)$ выражаются линейно через взаимные спектральные плотности $s_{kp}^{jm}(u)$. При выполнении ограничений (2) решение системы (1) имеет вид [3]:

$$Y(t,\omega)=\exp\left[t\left(A+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^sK_s\right)\right]+$$

$$+\mu e^{At}C_1(t,\omega)\exp\left[t\left(\sum_{s=1}^{\infty}\mu^sK_s\right)\right]+o(\mu^2), \qquad (11)$$

где $C_1(t,\omega)$ — случайная матрица, ограниченная в среднем квадратичном. Отсюда получаем, что $Z(p,\omega)$ имеет вид

$$Z(p,\omega)=\left(Ep-A-\sum_{s=1}^{\infty}\mu^sK_s\right)^{-1}+\mu Z_1(p,\omega) \qquad (12)$$

и, следовательно,

$$M\{H(p,\ldots,\omega)\,Z(p,\omega)\}=M\{H(p,\ldots,\omega)\}\,M\{Z(p,\omega)\}+o(\mu). \qquad (13)$$

Усредняя по Ω обе части системы (8) и учитывая (13) и (10), находим систему уравнений

$$\left(Ep-A+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}H(p,u)\,du+o(\mu^3)\right)G(p)=E, \qquad (14)$$

где

$$G(p)=M\{Z(p,\omega)\}. \qquad (15)$$

Особые точки $G(p)$ определяют асимптотическое поведение $M\{Y(t,\omega)\}$ и находятся из уравнения

$$\det\left(Ep-A+\mu^2\int_{-\infty}^{\infty}H(p,u)\,du+o(\mu^3)\right)=0. \qquad (16)$$

Если корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части независимо от членов порядка μ^3, то система (1) устойчива в среднем [6].

Для исследования устойчивости в среднем квадратичном решений системы (1) рассматриваем матрицу вторых моментов $R(t)$:

$$R(t)=M\{K(t,\omega)\},\quad K(t,\omega)=[y_jy_s]=[k_{js}(t,\omega)]. \qquad (17)$$

Случайную матрицу $K(t, \omega)$ можно представить в виде [7]

$$K(t, \omega) = Y(t, \omega) Y^*(t, \omega); \quad K(t, \omega) = K^*(t, \omega). \tag{18}$$

Для $K(t, \omega)$ получаем систему

$$\dot{K}(t, \omega) = AK(t, \omega) + K(t, \omega) A^* + \mu (B(t, \omega) K(t, \omega) + K(t, \omega) B^*(t, \omega)). \tag{19}$$

Вводя в рассмотрение случайный вектор

$$Q(t, \omega) = [q_k(t, \omega)], \quad q_k(t, \omega) = k_{js}(t, \omega), \quad k = 1, 2, \ldots, N = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{20}$$

систему (19) перепишем в виде

$$\dot{Q}(t, \omega) = [Q_1 + \mu D(t, \omega)] Q(t, \omega), \tag{21}$$

где Q_1 — постоянная матрица порядка $N \times N$, а элементы матрицы $D(t, \omega)$— линейные комбинации элементов матрицы $B(t, \omega)$. Очевидно, что условия устойчивости в среднем системы (21) эквивалентны условиям устойчивости в среднем квадратичном решений системы (1).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Если элементы матрицы* $B(t, \omega)$ — *стационарные и стационарно-связанные в широком смысле случайные процессы, удовлетворяющие ограничениям* (2), *то*:

а) *система* (1) *устойчива в среднем, если корни уравнения* (16) *имеют отрицательные вещественные части независимо от членов порядка* μ^3;

б) *система* (1) *устойчива в среднем квадратичном, если система* (21) *устойчива в среднем.*

Пример. Исследуем в указанном выше смысле устойчивость решений уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + \mu^2 \delta \dot{y} + \lambda^2 y + \mu \xi(t, \omega) y = 0, \tag{22}$$

где $\delta > 0$, $\xi(t, \omega)$ — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $k(\tau)$ и спектральной плотностью $s(u)$, удовлетворяющий ограничениям (2).

Уравнение (16) принимает вид

$$a(p) - \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} s(u) a^{-1}(p - iu)\, du + o(\mu^3) = 0, \quad a(p) = p^2 + \mu^2 \delta p + \lambda^2. \tag{23}$$

Для одного из корней этого уравнения получаем

$$p_1 = i\lambda - \frac{\mu^2 \delta p}{p + i\lambda} + \frac{\mu^2}{p + i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)\, du}{a(p - iu)} + o(\mu^3).$$

Решая его методом последовательных приближений, находим условия устойчивости в среднем:

$$s(2\lambda) - s(0) < \frac{2\lambda^2 \delta}{\pi} + o(\mu). \tag{24}$$

Переходя к системе вида (21), получим после вычислений условия устойчивости в среднем квадратичном:

$$\begin{gathered} s(2\lambda) < \frac{\lambda^2 \delta}{\pi} + o(\mu), \\ s(2\lambda) - 2s(0) < \frac{2\lambda^2 \delta}{\pi} + o(\mu). \end{gathered} \tag{25}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
2. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.
3. В. М. Алексеев, Исследование некоторых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, Автореферат канд. дисс., К., 1970.
4. Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, М., 1963.
5. И. З. Штокало, Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, К., 1961.
6. В. Г. Коломиец, Д. Г. Кореневский, Об устойчивости линейных систем со случайными возмущениями, Прикладная механика, т. 3, № 8, 1967.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.

Поступила 3.III 1971 г.,
после переработки — 22.VIII 1972 г.
Киевский институт инженеров гражданской авиации

УДК 531.352.396

О движении вокруг центра масс свободного твердого тела, стабилизируемого вращением относительно неглавной оси инерции

В. А. Гробов, Д. В. Лебедев

Для обеспечения ориентации одной из осей свободного твердого тела в инерциальном пространстве в ряде случаев применяются системы стабилизации, основанные на использовании гироскопических свойств вращающихся тел [1—3]. Известно, что стационарное вращение свободного тела относительно главных осей, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции, устойчиво [4, 5]. При наличии диссипации энергии устойчивым остается только вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции [2, 3].

В данной статье методами теории возмущений исследуется влияние параметров эллипсоида инерции на вращательное движение несимметричного твердого тела вокруг неглавной оси, соответствующей максимальному моменту инерции.

Введем ортогональный трехгранник $Oxyz$, жестко связанный с телом, оси которого не совпадают с главными осями инерции.

Предполагается, что система управления сообщает твердому телу требуемую угловую скорость вращения вокруг оси Oy, после чего оно совершает движение по инерции.

Уравнения движения свободного твердого тела относительно центра масс в проекциях на связанные с ним координатные оси $Oxyz$ записываются в виде

$$\begin{gathered}\dot{\omega}_x = \alpha_{11}\omega_x\omega_y + \alpha_{13}\omega_y\omega_z + \alpha_{15}\omega_y^2 + \mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z),\\ \dot{\omega}_y = \mu F_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \qquad (1)\\ \dot{\omega}_z = \alpha_{31}\omega_x\omega_y + \alpha_{33}\omega_y\omega_z + \alpha_{35}\omega_y^2 + \mu F_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z),\end{gathered}$$

где

$$\mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (a_{11} - \alpha_{11})\,\omega_x\omega_y + a_{12}\omega_x\omega_z + (a_{13} - \alpha_{13})\,\omega_y\omega_z + a_{14}\omega_x^2 + \\ + (a_{15} - \alpha_{15})\,\omega_y^2 + a_{16}\omega_z^2,$$