УДК 519.21

Об устойчивости решений линейных дифференциально-функциональных уравнений к случайным возмущениям параметров

В. Е. Слюсарчук, Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциально-функциональное уравнение с последействием

$$dx(t) = m(x_t(\theta))\,dt + \sigma(x_t(\theta))\,dw(t), \tag{1}$$

где $m(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ — линейные непрерывные функционалы, $m(0) = \sigma(0) = 0$, $w(t)$ — процесс броуновского движения с нулевым сносом и единичным параметром диффузии, $x_t(\theta)$ — отрезок траектории скалярного случайного процесса $x(t): x_t(\theta) = \{x(t+\theta),\ -h \leqslant \theta \leqslant 0\}$. Пусть $\mathfrak{F}_t$ — неубывающее семейство σ-алгебр, относительно которых измерим $w(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant t$ и от событий которых $w(\tau) - w(t)$ при $\tau \geqslant t$ не зависит. Обозначим через $\mathfrak{M}_T$ пространство случайных процессов $\xi(t)$ измеримых при $0 \leqslant t \leqslant T$ относительно семейства $\mathfrak{F}_t$ и таких, что

$$\int_0^T E\{\xi^2(t)\}\,dt = \|\xi(t)\|_T^2 < \infty,$$

где E — операция математического ожидания. В [1] показано, что в $\mathfrak{M}_T$ существует и единственное решение начальной задачи уравнения (1) при любом конечном T, причем почти наверное $x_t(\theta) \in C_{[-h,0]}$.

Предложение. *Собственные значения производящего оператора полугруппы решений* [2] *уравнения*

$$\frac{dy(t)}{dt} = m(y_t(\theta)) \tag{2}$$

расположены в левой полуплоскости.

Назовем фундаментальным решением (2) решение, построенное по начальной функции

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ при } -h \leqslant \theta < 0, \\ 1 \text{ при } \qquad \theta = 0, \end{cases}$$

и обозначим его через $h(t)$. При выполнении предложения это фундаментальное решение экспоненциально убывает при $t \to \infty$ и, так как $h(t) \in L_{2(0,\infty)}$, то по теореме Планшереля легко получить для любого $f \in C^*_{[-h,0]}$

$$\|f(h_t(\theta))\|^2_{L_{2(0,\infty)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{f(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})}\right|^2 d\lambda. \tag{3}$$

Используя $h(t)$, перепишем уравнение (1) в интегральной форме

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t-\tau)\,\sigma(x_\tau(\theta))\,dw(\tau), \tag{4}$$

где $y(t)$ — некоторое решение (2).

Теорема 1. *При любом $f \in C^*_{[-h,0]}$ имеет место $f(x_t(\theta)) \in \mathfrak{M}_\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sigma(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})}\right|^2 d\lambda < 1. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $\mu_f(t) = E\{[f(x_t(\theta))]^2\}$ и, переписав (4) в виде

$$f(x_t(\theta)) = f(y_t(\theta)) + \int_0^t f(h_{t-\tau}(\theta))\,\sigma(x_\tau(\theta))\,dw(\tau), \tag{6}$$

возведем обе части этого уравнения в квадрат и применим операцию математического ожидания. Используя свойства интеграла по процессу броуновского движения [1], легко получить

$$\mu_f(t) = [f(y_t(\theta))]^2 + \int_0^t [f(h_{t-\tau}(\theta))]^2 \mu_\sigma(\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

и для доказательства необходимости остается вместо f в (6) взять σ, затем проинтегрировать полученное равенство по t от 0 до ∞ и использовать (3). Вместе с необходимостью доказано, что $\sigma(x_t(\theta)) \in \mathfrak{M}_\infty$. Тогда $\mu_\sigma(t) \in L_{1(0,\infty)}$ и, так как $h(t) \in L_{2(0,\infty)}$, а $f \in C^*_{[-h,0]}$, то $\mu_f(t) \in L_{1(0,\infty)}$, т. е. $f(x_t(\theta)) \in \mathfrak{M}_\infty$, тем самым теорема 1 полностью доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *тривиальное решение* (1) *асимптотически устойчиво в среднем квадратичном* [3].

Доказательство. При выполнении предложения для каждого решения $y(t, \varphi)$ уравнения (2), построенного по начальной функции φ, выполняется соотношение [2]

$$|y(t,\varphi)| \leqslant Ne^{-\beta t}\|\varphi\| \quad (N > 0,\ \beta > 0),$$

поэтому

$$\mu_\sigma(t) \leqslant \|\sigma\|^2 N^2 e^{-2\beta t}\|\varphi\|^2 + \int_0^t [\sigma(h_{t-\tau}(\theta))]^2 \mu_\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \mu_\sigma(t)\,dt \leqslant \frac{\|\sigma\|^2 N^2 \|\varphi\|^2}{2\beta\left(1 - \int_0^\infty [\sigma(h_\tau(\theta))]^2\,d\tau\right)}.$$

Для функционала $f \in C^*_{[-h,0]}$ такого, что $f(x_t(\theta)) = x(t)$, из (7) и предыдущего неравенства получим

$$E\{x^2(t)\} \leqslant N^2 e^{-2\beta t}\|\varphi\|^2 + \|h(t)\|_{C[0,\infty)} \frac{\|\sigma\|^2 N^2 \|\varphi\|^2}{2\beta\left(1 - \int_0^\infty [\sigma(h_\tau(\theta))]^2\,d\tau\right)},$$

откуда следует устойчивость тривиального решения в среднем квадратичном по Ляпунову. Так как $\mu_\sigma(t) \in L_{1(0,\infty)}$ и $\|h(t)\|_{C[0,\infty)} \leqslant Ne^{-\beta t}$, то из (7) следует, что для любого $f \in C^*_{[-h,0]}$ $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_f(t) = 0$. Это и завершает доказательство.

Легко показать, что условие (5) является необходимым для асимптотической устойчивости тривиального решения (1). Если (5) не выполнено, то в случае $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sigma(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})}\right|^2 d\lambda > 1$ второй момент решения (1), построенного не по нулевым начальным данным, неограниченно возрастает при $t \to \infty$. В случае $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sigma(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})}\right|^2 d\lambda = 1$ возьмем в качестве начальной функции

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } -h \leqslant \theta < 0, \\ 1 & \text{при } \qquad \theta = 0. \end{cases}$$

Тогда $y(t) = \delta h(t)$ и легко получить уравнение

$$\mu_\sigma(t) = \delta^2 [\sigma(h_t(\theta))]^2 + \int_0^t [\sigma(h_{t-\tau}(\theta))]^2 \mu_\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Используя результаты [4] и тот факт, что

$$\int_0^\infty [\sigma(h_t(\theta))]^2 dt = 1, \quad \int_0^\infty t\,[\sigma(h_t(\theta))]^2 dt < \infty,$$

легко получить

$$\lim_{t\to\infty} \mu_\sigma(t) = 2\delta^2 \lim_{t\to\infty} [\ln|\sigma(h_t(\theta))|]' \neq 0$$

для любого $\delta \neq 0$, а тогда $\lim\limits_{t\to\infty} E\{x^2(t)\} \neq 0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = \gamma x(t)\,dt + \frac{b}{h}\int_{-h}^{0} x(t+s)\,ds\,dw(t), \quad \gamma < 0.$$

Условие асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения этого уравнения можно получить по формуле (5):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left| \frac{\sigma(e^{i\lambda\theta})}{i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})} \right|^2 d\lambda = \frac{b^2}{\gamma^3 h^2}(1 + h\gamma - e^{-\gamma h}) < 1.$$

Рассмотрим дифференциально-функциональное стохастическое уравнение

$$du(t) = m(u_t(\theta))\,dt + \varphi(t)\,\sigma(u_t(\theta))\,dw(t). \tag{8}$$

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$ *и выполнены условия теоремы* 1, *то тривиальное решение* (8) *асимптотически устойчиво в среднем квадратичном.*

Доказательство. Аналогично (7) для решения (8) легко получить соотношение

$$\nu(t) = [\sigma(y_t(\theta))]^2 + \int_0^t [\sigma(h_{t-\tau}(\theta))]^2\,\nu(\tau)\,d\tau + \int_0^t [\sigma(h_{t-\tau}(\theta))]^2 (\varphi^2(\tau) - 1)\,\nu(\tau)\,d\tau$$

где $\nu(t) = E\{[\sigma(u_t(\theta))]^2\}$. Используя экспоненциальное убывание функций $[\sigma(h_t(\theta))]^2$ и $[\sigma(y_t(\theta))]^2$ и результаты анализа уравнения восстановления работы [4], легко получить

$$\nu(t) = \psi_1(t) + \int_0^t \psi_2(t-\tau)(\varphi^2(\tau) - 1)\,\nu(\tau)\,d\tau,$$

где $|\psi_j(t)| \leqslant C_j e^{-\gamma t}$, $j = 1, 2$, $\gamma > 0$. Тогда по лемме Гронуолла—Беллмана, [4]: $\nu(t) \leqslant C_1 e^{-\gamma t + C_2\int_0^t |\varphi^2(\tau) - 1|\,d\tau}$ и, так как $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi^2(\tau) - 1|\,d\tau = 0$, то следствие 2 доказано.

Замечание 1. Условие предложения является необходимым для асимптотической устойчивости тривиального решения (1) в среднем квадратичном в силу (7).

Используя методику доказательства теоремы 1, можно изучить уравнение

$$dv(t) = m(v_t(\theta))\,dt + av(\alpha t)\,dw(t), \tag{9}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$.

Следствие 3. *Если выполнено предложение и*

$$\frac{a^2}{\alpha\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{|i\lambda - m(e^{i\lambda\theta})|^2} < 1, \tag{10}$$

то решение (9) — $v(t) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Доказательство. Из (9) легко получить интегральное уравнение для $\xi(t) = E\{v^2(t)\}$:

$$\xi(t) = y^2(t) + a^2\int_0^t h^2(t-\tau)\,\xi(\alpha\tau)\,d\tau.$$

Если теперь проинтегрировать полученное равенство от 0 до ∞, то получим утверждение следствия 3.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t) = f(t) + \int_0^t h(t,\tau)\,\sigma(\tau, z_{\alpha(\tau)}(\theta))\,d\tau \tag{11}$$

с начальным условием $z(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-h, 0]$, где $\sigma(t, \cdot) \in C^*_{[-h,0]}$, $-h \leqslant \min\limits_{\tau \geqslant 0}\alpha(\tau)$, $\sigma(t, 0) \equiv 0$, $h(t,\tau)$ — непрерывная по обеим переменным $(t \geqslant \tau)$ неотрицательная функция, $f \in C_{[0,\infty)}$ непрерывна и $\underline{\lim}_{t\to\infty}\alpha(t) = \infty$.

Лемма. *Если:*

1) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$;

2) $b = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, b(t) = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\int_0^{\alpha(t)} \sigma(t, h_{\alpha(t)}(\theta,\tau))\,d\tau < 1$;

3) *существует* $l > 0$ *и* $r > 0$ *такие, что* $h(t,\tau) \leqslant l$, $\int_0^t h(t,\tau)\,d\tau \leqslant r$;

4) $\lim\limits_{t\to\infty} h(t,\tau) = 0$;

5) $\sigma(t, \cdot)$ *ограничены равномерно по* t *по норме* $C^*_{[-h,0]}$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Доказательство. Из (11) для $m(t) = \sigma(t, z_{\alpha(t)}(\theta))$ легко получить уравнение

$$m(t) = g(t) + \int_0^{\alpha(t)} \sigma(t, h_{\alpha(t)}(\theta,\tau))\,m(\tau)\,d\tau,$$

где $g(t) = \sigma(t, f_{\alpha(t)}(\theta))$, причем в условиях леммы $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$. Задавшись $\varepsilon > 0$, выберем $T > 0$ таким, чтобы при $t \geqslant T$ имело место неравенство $\sup\limits_{\theta\geqslant T} b(\theta) \leqslant b + \varepsilon$, и тогда для $M(t,T) = \max\limits_{T\leqslant\tau\leqslant t} m(\tau)$ получим

$$M(t,T) \leqslant \max_{T\leqslant\theta\leqslant t} g(\theta) + \max_{T\leqslant\theta\leqslant t}\int_0^{\beta(T_0)} \sigma(\theta, h_{\alpha(\theta)}(\theta,\tau))\,m(\tau)\,d\tau + \max_{T\leqslant\theta\leqslant t} b(\theta)\,M(t,T),$$

где T_0 таково, что $\beta(T_0) = \min\limits_{t\geqslant T_0}\alpha(t) \geqslant T$, откуда легко получить $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, M(t,T) < \infty$. Далее, так как в условиях леммы имеет место

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left[g(t) + \int_0^{\beta(T_1)} \sigma(t, h_{\alpha(t)}(\theta,\tau))\,m(\tau)\,d\tau\right] = 0,$$

то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, m(t) \leqslant (b+\varepsilon)\lim_{t\to\infty} M(t, \beta(T_1))$$

при достаточно большом T_1. Остается использовать условие 2) леммы и, выбрав ε достаточно малым, получить $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, m(t) = 0$. Теперь для $z(t)$ легко получить неравенство

$$z(t) \leqslant f(t) + \int_0^t h(t,\tau)\, m(\tau)\, d\tau$$

и, используя условия 3) и 4) леммы, можно убедиться, что имеет место утверждение леммы.

Замечание 2. В условиях леммы имеет место непрерывная зависимость решения (11) от $f(t)$ и $\varphi(t)$ в силу ограниченности линейного оператора, определенного уравнением (11).

Рассмотрим стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$d\xi(t) = m(t, \xi_t(\theta))\, dt + \sigma(t, \xi_{\alpha(t)}(\theta))\, dw(t),$$
$$\xi(\theta) = \varphi(\theta) \text{ при } -h \leqslant \theta \leqslant 0, \tag{12}$$

где $m(t,\cdot)$, $\sigma(t,\cdot) \in C^*_{[-h,0]}$, $m(t,0) = \sigma(t,0) \equiv 0$.

Теорема 2. *Если:*

1) *квадрат решения* $h(t,\tau)$ *уравнения*

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = m(t, \eta_t(\theta)) \tag{13}$$

по начальной функции

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < \tau, \\ 1 \text{ при } t = \tau \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 3) *и* 4) *леммы;*

2) *тривиальное решение* (13) *асимптотически устойчиво:*

3) $\overline{\lim\limits_{t=\infty}} \int_0^t [\sigma(t, h_{\alpha(t)}(\theta,\tau))]^2\, d\tau < 1;$

4) $\sigma(t,\cdot)$ *ограничены равномерно по* t *по норме* $C^*_{[-h,0]}$, *то тривиальное решение уравнения* (12) *асимптотически устойчиво в среднем квадратичном.*

Доказательство. Если, используя методику доказательства теоремы 1, перейти к интегральному уравнению для $m(t) = E\{|\sigma(t, \xi_{\alpha(t)}(\theta))|^2\}$, то легко убедиться, что мы находимся в условиях леммы и тогда $\lim\limits_{t\to\infty} m(t) = 0$. Далее, $E\{\xi^2(t)\} \to 0$ при $t \to \infty$, так как

$$E\{\xi^2(t)\} = \eta^2(t) + \int_0^t h^2(t,\tau)\, m(\tau)\, d\tau$$

и для $h^2(t,\tau)$ выполнены условия леммы. Для завершения доказательства остается использовать замечание 2, так как второй момент решения непрерывно зависит от $\eta(t)$, т. е. от $\varphi(\theta)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = -ax(t)\, dt + bx(\alpha t)\, dw(t), \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad a > 0. \tag{14}$$

По теореме 2 для исследования устойчивости тривиального решения этого уравнения нужно вычислить

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, b^2 \int_0^{\alpha t} e^{-2a(\alpha t - \tau)}\, d\tau = \frac{b^2}{2a}$$

и сравнить это число с единицей. Итак, условие асимптотической устойчивости тривиального решения в среднем квадратичном имеет вид $b^2 < 2a$.

Однако при этом не всегда решение (14) принадлежит пространству $\mathfrak{M}_\infty$. Действительно, для $\mu(t) = E\{x^2(t)\}$ легко получить интегральное уравнение

$$\mu(t) = e^{-2at}x_0^2 + b^2 \int_0^t e^{-2a(t-\tau)}\mu(\alpha\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$\| x(t) \|_\infty^2 = \frac{1}{2a}x_0^2 + b^2 \frac{1}{2a} \| x(\alpha t) \|_\infty^2 = \frac{1}{2a}x_0^2 + b^2 \frac{1}{2a\alpha} \| x(t) \|_\infty^2,$$

т. е. условие $x(t) \in \mathfrak{M}_\infty$ выполнено, если $b^2 < 2a\alpha$. Следовательно, при $\alpha < 1$ в отличии от уравнений типа (1) здесь существуют решения, второй момент которых стремится к нулю, но все же $x(t) \overline{\in} \mathfrak{M}_\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ito and M. Nisio, On stationary solutions of a stochastic differential equation, Kyoto, J. Math., **4**, 1964, 1—75.
2. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, «Наука», М., 1959.
3. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров, «Наука», М., 1969.
4. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.

Поступила 14.I 1972 г.

Черновицкий государственный университет