УДК 512.53

О сходимости интерполяционных рациональных функций

Т. В. Дидковская

1. Введение. Если заданы точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ и числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$, то, как известно [1], существует единственная рациональная функция

$$r_n(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)},$$

принимающая в точках β_ν значения μ_ν. В данном случае приходим к интерполяционной формуле, обобщающей формулу Лагранжа:

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu_k \frac{\omega(z)}{(z-\beta_k)\,\omega'(\beta_k)}, \quad \omega(z) = \frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_{n+1})}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}. \tag{1}$$

Для рациональной функции, которая совпадает с данной функцией в точках β_k, нужно положить $\mu_k = f(\beta_k)$. Если $\beta_k = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$; $\alpha_k = \sqrt[n]{A^n} = Ae^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$r_n(z) = \frac{1}{z^n - A^n} \sum_{k=1}^{n+1} f(\beta_k) \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} z^m \beta_k^{n-m} - \\ - \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{k=1}^{n+1} f(\beta_k) \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} z^m \beta_k^{-m}. \quad (2)$$

Возникает вопрос сходимости последовательностей рациональных функций с заданными полюсами, полученных интерполяцией данной функции в данных точках. Уолш [1] доказал ряд теорем, посвященных этому вопросу. В данной работе рассматриваются две теоремы при более слабых ограничениях, наложенных на интерполирующую функцию.

2. Теорема 1. *Если функция $f(z)$ аналитична при $|z| < R$ $B < R < A$, непрерывна при $|z| \leqslant R$, ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (3)$$

абсолютно сходится на границе, то последовательность рациональных функций степеней n с полюсами в n точках $(A^n)^{\frac{1}{n}}$, интерполирующих $f(z)$ в $n+1$ точках $(B^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$, равномерно сходится к $f(z)$ при $|z| \leqslant R$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $1 < R < A$, так как общий случай сводится к указанному посредством преобразования $z = Bz'$. Интерполяционная последовательность при этом имеет вид (2).

Следуя [2], приведем ряд (3) к виду

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^{\lambda(n+1)} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i. \quad (4)$$

Тогда

$$f(\beta_k) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} \beta_k^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \beta_k^i, \quad (5)$$

где $b_i = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda(n-1)+i}$.

Из условия, что данный ряд абсолютно сходится при $|z| = R$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| R^k < \infty; \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| R^k = \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty. \quad (6)$$

Используя (4), из (2) получаем

$$r_n(z) = \frac{1}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{m=0}^{n} z^m \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{i-(m+1)} - \\ - \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{m=0}^{n} z^m \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{i-m}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{\nu} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \lambda(n+1), \\ n+1, & \nu = \lambda(n+1), \end{cases} \tag{7}$$

то

$$\sum_{m=0}^{n} z^m \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{i-(m+1)} = \begin{cases} z^n, & i = 0, \\ z^{i-1}, & i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{n} z^m \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^{i-m} = z^i.$$

Отсюда

$$r_n(z) = \frac{z^n}{z^n - A^n} b_0 + \frac{1}{z^n - A^n} \sum_{i=1}^{n} b_i z^{i-1} - \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} b_i z^i.$$

Используя (5), преобразуем полученное выражение

$$r_n(z) = \frac{z^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda(n+1)} + \frac{1}{z(z^n - A^n)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i -$$

$$- \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i. \tag{8}$$

Из (4) и (8) получаем

$$\Delta_n(z) = f(z) - r_n(z) =$$

$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{\infty} z^{\lambda(n+1)} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i \right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=0}^{n} c_i z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} c_i z^i \right] -$$

$$- \frac{z^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda(n+1)} - \frac{1}{z(z^n - A^n)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i.$$

Пусть z — произвольная точка окружности $|z| = R$. Докажем, что $\Delta_n(z)$ равномерно стремится к нулю, если $n \to \infty$. Отсюда будет следовать, что утверждение справедливо для произвольной точки z из области $|z| \leqslant R$.

$$|\Delta_n(z)| \leqslant \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} z^{\lambda(n+1)} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{z(z^n - A^n)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i \right| + \left| \frac{z^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda(n+1)} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{n} c_i z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} c_i z^i \right|,$$

$$\Delta_n^{(1)}(z) = \left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} z^{\lambda(n+1)} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{z^{\lambda(n+1)} \left| 1 - \left(\frac{z}{A}\right)^n \right|} \right| \sum_{i=0}^{n} |c_{\lambda(n+1)+i}| R^{\lambda(n+1)+i},$$

$$\Delta_n^{(2)}(z) = \left| \frac{1}{z(z^n - A^n)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda(n+1)+i} z^i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{z^{n+1} \left[1 - \left(\frac{A}{z}\right)^n \right]} \right| \sum_{k=1}^{n} |b_k| R^k.$$

Так как для z на окружности $|z| = R$, $1 < R < A$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z^{\lambda(n+1)}} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{A}\right)^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{A}{z}\right)^n} = 0,$$

то отсюда, учитывая (6), начиная с некоторого n, выполняется

$$\Delta_n^{(1)}(z) \leqslant 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} |c_{\lambda(n+1)+i}| R^{\lambda(n+1)+i} = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| R^k = 2\varepsilon_n \to 0, \tag{9}$$

$\Delta_n^{(2)}(z) \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\Delta_n^{(3)}(z) = \left| \sum_{i=0}^{n} c_i z^i + \frac{A^n}{z^n - A^n} \sum_{i=0}^{n} c_i z^i \right| \leqslant \frac{1}{\left|\frac{A}{z}\right|^n - 1} \sum_{i=0}^{n} |c_i| R^i,$$

$$\Delta_n^{(4)}(z) = \left| \frac{z^n}{z^n - A^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda(n+1)} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\frac{A}{z}\right|^n - 1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |c_{\lambda(n+1)}|.$$

Из условия $|z| = R < A$ и (6) вытекает

$$\Delta_n^{(3)}(z) \to 0, \quad \Delta_n^{(4)}(z) \to 0, \text{ если } n \to \infty. \tag{10}$$

Таким образом, из (9) и (10) следует, что $|\Delta_n(z)| \to 0$ равномерно при $n \to \infty$ в области $|z| \leqslant R$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если функция $g(z)$ аналитична при $|z| > R$, непрерывна при $|z| \geqslant R$, $B < R < A$, ряд*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

абсолютно сходится на окружности $|z| = R$, то последовательность рациональных функций степеней n с полюсами в точках $(B^n)^{\frac{1}{n}}$, интерполи-

рующих $g(z)$ *в* $n+1$ *точках* $(A^{n+1})^{\overline{n+1}}$, *равномерно сходится к* $g(z)$ *при* $|z| \geqslant R$.

Эта теорема может быть доказана аналогично или сведена к первой теореме с помощью преобразования $\zeta = \frac{1}{z}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.
2. М. М. Каркузашвілі, П. Я. Кисельов, Про раціональну інтерполяцію, ДАН УРСР, сер. А, № 9, 1970.

Поступила 17.III 1972 г.

Институт математики АН УССР