УДК 518:517.948

О методе редукции для нелинейных систем

С. П. Лавренюк, Е. Н. Парасюк

1. Напомним для удобства некоторые определения и сведения из теории квазирешений [1, 2]. Рассматривается операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $x \in X$, $y \in X$, X, Y — полные метрические пространства, оператор A — непрерывный (не обязательно линейный). Квазирешением уравнения (1) на множестве $M \subset X$ называется каждый элемент $x' \in M$, для которого

$$\rho(Ax', y) = \min_{x \in M} \rho(Ax, y). \tag{2}$$

Таким образом, любое решение уравнения (1) на M, если оно существует, является квазирешением. Множество $Q = Q(y, A, M)$ всех квазирешений уравнения (1) на M назовем полным множеством квазирешений. Очевидно, что если M — компакт, множество Q не пустое. Пусть C и S — некоторые множества пространства X.

Полуотклонением множества C от множества S называется величина

$$\beta(C, S) = \sup_{x \in C} \rho(x, S).$$

Отклонением между этими множествами называют

$$\alpha(C, S) = \max\{\beta(C, S), \beta(S, C)\}.$$

Будем говорить [2], что множества $C_n \subset X$, $n \geqslant 1$, β-сходятся (α-сходятся) к множеству S и запишем в виде $C_n \xrightarrow{\beta} S$, $n \to \infty$ ($C_n \xrightarrow{\alpha} S$, $n \to \infty$), если $\beta(C_n, S) \to 0$, $n \to \infty$ ($\alpha(C_n, S) \to 0$, $n \to \infty$).

Пусть m — также множество из X. Определим для заданных на $m \subset X$ операторов, что действуют из пространства X в Y, метрику по формуле

$$\rho_m(A_1, A_2) = \sup_{x \in m} \rho(A_1 x, A_2 x)/\rho(x, \theta),$$

где $\theta \in X$ — фиксированный элемент.

Рассмотрим теперь рядом с уравнением (1) и его квазирешениями Q на множестве $M \subset X$ «приближенные» уравнения

$$A_n x = y_n, \quad y_n \in Y, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

и их квазирешения $Q_n = Q(y_n, A_n, M_n)$ на множествах $M_n \subset X$, $n \geqslant 1$. Будем считать все операторы A, A_n, $n \geqslant 1$, определенными на множестве $m = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} M_n \cup M$. Как показано в [2], имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если оператор $A: X \to Y$ — непрерывный (хотя бы на множестве $m = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} M_n \cup M$), множество M компактное в X,*

$$y_n \to y, \ \rho_m(A_n, A) \to 0, \quad M_n \xrightarrow{\alpha} M, \quad n \to \infty,$$

то при непустых Q_n

$$Q_n \xrightarrow{\beta} Q, \ n \to \infty.$$

2. Рассмотрим бесконечную систему нелинейных уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$g_n(x) = c_n, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через R_∞^∞ линейное пространство всех вещественных ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с обычными (покоординатными) операциями и нормой, которая определяется по формуле $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$. Как известно, простр нство R_∞^∞ — полное.

Обозначим через T^∞ множество всех элементов $x = (x_1, x_2, \ldots) \in R_\infty^\infty$, для которых выполняется условие: $0 \leqslant |x_n| \leqslant r_n$, где $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$. Очевидно, T^∞ — компакт. Пусть функции $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям:

1) $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывные по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots$, если $x \in T^\infty$;

2) существует такое число $1 \leqslant \rho < \infty$, что $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{\rho^n}{n^{1+\sigma}}$, $\sigma > 0$, $x \in T^\infty$. Пусть, кроме того, выполняется условие

3) $|c_n| \leqslant \frac{\rho^n}{n^{1+\sigma}}, \quad \sigma > 0.$

Назовем квазирешением системы (4) на множестве T^∞ такой элемент $x' \in T^\infty$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|g_{n+1}(x') - c_{n+1}|}{\rho^{n+1}} = \min_{x \in T^\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|g_{n+1}(x) - c_{n+1}|}{\rho^{n+1}}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если для системы* (4) *выполняются условия* 1) — 3), *то одно из квазирешений этой системы можно найти методом редукции.*

Для доказательства теоремы введем пространство $C^1[0, \pi]$ непрерывных функций, определенных на $[0, \pi]$, производная которых кусочно-непрерывная. В пространстве $C^1[0, \pi]$ введем норму

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \tag{5}$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$. Очевидно, что (5) удовлетворяет всем аксиомам нормы и $C^1[0, \pi]$ является полным нормированным пространством. Легко видеть, что система (4) эквивалентна уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{n+1}(x)}{\rho^{n+1}} \cos n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{\rho^{n+1}} \cos n\varphi. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно записать в виде

$$Ax = f, \tag{7}$$

где $x \in T^\infty$, $f \in C^1[0, \pi]$. Очевидно, при условиях 1), 2) оператор A непрерывный. Наряду с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$A_n x = f_n, \tag{8}$$

которое отвечает редуцированной системе для (4), где

$$A_n x = \sum_{k=0}^{n} \frac{g_{k+1}(x)}{\rho^{k+1}} \cos k\varphi, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cos k\varphi.$$

Уравнение (8) рассматриваем на множестве $T^n \subset T^\infty$, элементами которого являются последовательности, в которых все координаты, начиная с $n+1$-й, равны нулю. Легко видеть, что все T^n — компакты, $\alpha(T^n, T^\infty) \to 0$, $n \to \infty$, и $f_n \to f$, $n \to \infty$. Введем для операторов A, A_n, $n \geqslant 1$, на множестве T^∞ метрику по формуле

$$\rho_{T^\infty}(A_1, A_2) = \sup_{x \in T^\infty} \rho(A_1 x, A_2 x)/\rho(x, \theta),$$

где θ — фиксированный элемент такой, что $\theta \in R^\infty_\infty$, но $\theta \notin T^\infty$.

Очевидно, что $\rho_{T^\infty}(A_n, A) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда, согласно теореме 1 полные множества квазирешений уравнений (8) $Q_n = Q(f_n, A_n, T^n)$ β-сходятся к полному множеству $Q = Q(f, A, T^\infty)$ квазирешений уравнения (7).

Очевидно, если существует единственное решение системы (4), то произвольное квазирешение редуцированной системы будет его приближением на множестве T^{∞}.

3. Результаты предыдущего пункта можно использовать для приближенного нахождения решения обратной задачи теории логарифмического потенциала простого слоя и для доказательства β-устойчивости этой задачи. Пусть в плоскости xy задана гармоническая функция $f(\rho, \theta)$ ((ρ, θ) — полярные координаты). Нужно найти тот плоский контур L, который при заданной интегрируемой плотности μ имеет внешний логарифмический потенциал $f(\rho, \theta)$. Сформулированная задача сводится к уравнению

$$\int_L \mu \ln \frac{1}{R}\, ds = f(\rho, \theta), \tag{9}$$

где R — расстояние элемента ds контура L до точки $P(\rho, \theta)$.

Будем считать, что потенциал $f(\rho, \theta)$ известен на окружности радиуса ρ_0 с центром в начале координат и искомый контур L находится внутри этой окружности. Пусть $f(\rho_0, \theta) \in C^1[0, 2\pi]$ и контур L является звездной кривой вида $r = r(\varphi)$. Решение уравнения (9) будем искать на множестве непрерывно дифференцируемых функций $r(\varphi)$, производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \lambda < 1$ и норма которых в классе функций $C_{1+\lambda}[0, 2\pi]$ ограничена некоторой постоянной N: $M = \{r(\varphi) : \|r(\varphi)\|_{1+\lambda} \leqslant N\}$. Очевидно, M — компакт. Интеграл, который стоит в левой части уравнения (9), можн разложить в ряд

$$\int_L \mu \ln \frac{1}{R}\, ds = \ln \frac{1}{\rho_0} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\rho_0^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) [r(\varphi)]^n \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \cos n(\varphi - \theta)\, d\varphi,$$

который равномерно сходится при $r < \rho_0$. Разложив функции $r(\varphi)$, $f(\rho_0, \theta)$ в ряды Фурье

$$r(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (r_n^{(1)} \cos n\varphi + r_n^{(2)} \sin n\varphi),$$

$$f(\rho_0, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

получим бесконечную систему нелинейных уравнений

$$\ln \frac{1}{\rho_0} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi = \alpha_0,$$

$$\frac{1}{n\rho_0^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) [r(\varphi)]^n \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \cos n\varphi\, d\varphi = \alpha_n, \tag{10}$$

$$\frac{1}{n\rho_0^n} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) [r(\varphi)]^n \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} \sin n\varphi\, d\varphi = \beta_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, система (10) удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, ее решение можно искать методом редукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Иванов, О некорректно поставленных задачах, Матем. сб., т. 61(103), вып. 2, 1963.
2. О. А. Лисковец, Некорректные задачи и устойчивость квазирешений, Сиб. матем. ж., т. 10, № 2, 1969.
3. И. М. Рапопорт, Об одной задаче теории потенциала, УМЖ, т. 2, № 2, 1950.

Поступила 5.III 1971 г.
Львовский государственный университет