УДК 517.948.34

О непрерывной зависимости решения бесконечномерной системы интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной от параметра, и метод усреднения

Т. В. Меликидзе

В данной работе рассматривается вопрос о применении теоремы Н. Н. Боголюбова [1] в модифицированном доказательстве И. И. Гихмана [2] к новому классу систем [3].

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной

$$\dot{x}_i = X_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \int\limits_0^t \varphi_i(t, s, x(s), \ldots, \dot{x}_1(s), \ldots)\, ds, \lambda\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где функции $X_i(t, x, y, z, \lambda)$, $\varphi_i(t, s, x, y)$ со значениями в пространстве C определены в ограниченной области

$$Q\{0 \leqslant t;\ s \leqslant T;\ \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots) \leqslant \rho_1;\ \sup(|\dot{x}_1|, |\dot{x}_2|, \ldots) \leqslant \rho_2;\ \lambda \in \Lambda\},$$

причем ρ_1, ρ_2, $T = \mathrm{const}$, а Λ — некоторое множество значений λ, для которого λ_0 является предельной точкой.

Теорема 1. *Пусть в области Q выполняются следующие условия:*

1) *функции $X_i(t, x, y, z, \lambda)$ равномерно ограничены с константой M, непрерывны по t, x, y, z, $X_i \in Lip_{x,y,z}[k]$;*

2) *функции* $\varphi_i(t, s, x, y)$ *непрерывны по каждому аргументу*

$$t, s, x, y;\ \ \varphi_i \in Lip_{x,y}[\mu(t, s)];\ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \mu(\tau, s)\, ds \leqslant r;$$

3) $$|\, X_i\left(t, 0, \ldots, 0, \ldots, \int\limits_0^t \varphi_i(t, s, 0, \ldots, 0, \ldots)\, ds, \lambda\right) = 0;$$

4) $$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_t^{t+t_1} X_i\left(\tau, x, \dot{x}, \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x, \dot{x})\, ds, \lambda\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_t^{t+t_1} X_i\left(\tau, x, \dot{x}, \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x, \dot{x})\, ds, \lambda_0\right) d\tau\ (0 \leqslant t \leqslant t + t_1,\ t > 0);$$

5) *решение* $u_i(t) = u_i(t, \lambda_0)$ *системы*

$$\dot{u}_i = X_i\left(t, u, \dot{u}, \int\limits_0^t \varphi_i(t, s, u(s), \dot{u}(s))\, ds, \lambda_0\right) (i = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

а

$$[u = (u_1, u_2, \ldots), \dot{u} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots)]$$

лежит вместе с ρ*-окрестностью в области* Q.

Тогда решение $x_i = x(t, \lambda)$ *системы (1), совпадающее с решением* $u_i = u_i(t, \lambda)$ *системы (2) при* $t = 0$, *непрерывно по* λ *в точке* $\lambda = \lambda_0$, *т. е.*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_i \max_{0\leqslant t\leqslant T} |\, x_i(t, \lambda) - u_i(t, \lambda_0)\,| = 0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из двух частей:

1. Используя основное неравенство [4] и условия 2) и 3) теоремы, так же, как и в работе [5], доказывается, что последовательность непрерывных функций

$$A_i(t, x, \lambda) = x_i^0 + \int\limits_0 X_i\left(\tau, x, \dot{x}, \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(s), \dot{x}(s))\, d\lambda\right) d\tau$$

образует компактное множество в пространстве C.

2. Если для любого $\lambda \in \Lambda$ существует такое t_0, что при $t < t_0$ система (1) имеет решение $x_i = x_i(t, \lambda)$, лежащее внутри области Q, и если $t_1 > 0$ таков, что $0 \leqslant t < t + t_1 < t_0$, тогда

$$x_i(t + t_1, \lambda) - u_i(t + t_1, \lambda_0) = x_i(t, \lambda) - u_i(t, \lambda_0) +$$

$$+ \int\limits_t^{t+t_1} X_i\left[\left(\tau, x, \dot{x}, \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds, \lambda\right) -\right.$$

$$\left. - X_i\left(\tau, u, \dot{u}, \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, u(s), \dot{u}(s))\, ds, \lambda\right)\right] d\tau.$$

Обозначая $W(t) = \sup\limits_i |\, x_i(t) - u_i(t)\,|$, получим

$$W(t + t_1) \leqslant W(t) + \left|\int\limits_t^{t+t_1}\right. \left[X_i\left(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(s), \dot{x}(s))\, ds, \lambda\right) -\right.$$

$$\left. - X_i\left(\tau, x(t), \dot{x}(t), \int\limits_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot{x}(t))\, ds, \lambda\right)\right] d\tau +$$

$$+\left|\int_t^{t+t_1} X_i(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda) -\right.$$

$$\left. - X_i(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda_0)]\, d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+t_1}\right| X_i(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda_0) -$$

$$- X_i(\tau, u(t), \dot u(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, u(t), \dot u(t))\, ds, \lambda_0)\left|\, d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t+t_1}\right[X_i(\tau, u(t), \dot u(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, u(t), \dot u(t))\, ds, \lambda_0) -$$

$$\left.- X_i(\tau, u(\tau), \dot u(\tau), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, u(s), \dot u(s))\, ds, \lambda_0)\right]\, d\tau\Big|;$$

$$W(t+t_1) \leqslant W(t) + \frac{1-r}{1-k(1+r)} k t_1 W(t) + k\int_t^{t+t_1} [|x(\tau) - x(t)| +$$

$$+ |u(\tau) - u(t)| + |\dot x(\tau) - \dot x(t)| + |\dot u(\tau) - \dot u(t)| + \int_0^\tau \mu(\tau, s)\, [|x(\tau) - x(t)| +$$

$$+ |u(\tau) - u(t)| + |\dot x(\tau) - \dot x(t)| + |\dot u(\tau) - \dot u(t)|]\, ds]\, d\tau +$$

$$+ \int_t^{t+t_1}\Big[X_i(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda) -$$

$$- X_i(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda_0)\Big]\, d\tau\Big|. \qquad (3)$$

Заметим, что множество функций

$$\int_t^{t+t_1}\left[X_i\left(\tau, x(t), \dot x(t) \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x)(t), \dot x(t))\, ds, \lambda\right) -\right.$$

$$\left. - X_i\left(\tau, x(t), \dot x(t) \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda_0\right)\right] d\tau$$

в силу условий теоремы компактно. Учитывая условие 4), для любого сколь-угодно малого $\eta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ и для всех $t, s, x, y, z \in Q$

$$\left|\int_t^{t+t_1}\left[X_i\left(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - X_i\left(\tau, x(t), \dot x(t), \int_0^\tau \varphi_i(\tau, s, x(t), \dot x(t))\, ds, \lambda_0\right)\right] d\tau\right| < \eta. \qquad (4)$$

Можно показать, что

$$k\int\limits_{t}^{t+t_1}\Big[|x(\tau)-x(t)|+|u(\tau)-u(t)|+|\dot x(\tau)-\dot x(\tau)|+|\dot u(\tau)-\dot u(t)|+$$

$$+\int\limits_{0}^{\tau}\mu(\tau,s)\,[\,|x(\tau)-x(t)|+|u(\tau)-u(t)|+|\dot x(\tau)-\dot x(t)|+$$

$$+|\dot u(\tau)-\dot u(t)|]\,ds\Big|\,d\tau\leqslant 2T^2M(1+r)\left[1+\frac{(1+r)}{1-k(1+r)}\right]k. \qquad (5$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$W(t+t_1)\leqslant W(t)\left[1+\frac{(1-r)k}{1-k(1+r)}t_1\right]+$$

$$2kT^2M(1+r)\left[1+\frac{(1+r)}{1-k(1+r)}\right]+\eta. \qquad (6$$

Разделим интервал $[0, T]$ на N частей и положим

$$W\left(\frac{n}{N}t\right)=\exp\left(\frac{(1-r)k}{1-k(1+r)}\frac{t}{N}\right)\Psi\left(\frac{n}{N}t\right)(n=\overline{0,N-1}).$$

Тогда можно показать, что $W(t)<\rho$ при достаточно большом N и дос таточно малом η, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}x_i(t,\lambda)=x_i(t,\lambda_0).$$

В силу непрерывности $x_i=x_i(t,\lambda)$ $(0\leqslant t\leqslant t_0\leqslant T)$ любой кусок траекторий, определяемый системой (1), лежит внутри ρ-окрестности траектории $u_i(t,\lambda_0$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ и тем самым внутри Q и, следовательно, продолжается на весь отрезок $[0, T]$, что завершает доказательство теоремы

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$x_i=\varepsilon X_i\left(t,x_1,\ldots,\dot x_1,\ldots,\int\limits_0^t\varphi_i(t,s,x_1(s),\ldots,\dot x_1(s),\ldots)\,ds\right)\ (i=1,2,\ldots) \qquad (7)$$

и соответствующую ей усредненную систему

$$\dot u_i=\varepsilon\overline{X}_i(u_1,u_2,\ldots,\dot u_1,\dot u_2,\ldots) \qquad (8)$$

при начальных условиях $x_i(0)=u_i(0)=x_i^0$. Если в системах (7), (8) произвести замену $\tau=\varepsilon t$, $\varepsilon=\lambda$, то утверждение нашей теоремы перейдет в следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть:*

1) *функции* $X_i(t,x,y,z)$, $\varphi_i(t,s,x,y)$, $\overline{X}_i(u,\dot u)$ *в области* Q *удовлетворяют условиям* теоремы 1:

2) *при каждом* $x, y, z\in Q$ *существует предел*

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_0^L X_i\left(t,x,\dot x,\int\limits_0^t\varphi_i(t,s,x,\dot x)\,ds\right)dt=\overline{X}_i(x,\dot x); \qquad (9)$$

3) *при* $\varepsilon=1$ *система* (8) *имеет единственное решение* $u_i(t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $x_i(0)=u_i(0)=x_i^0$, *определенное при* $0\leqslant t\leqslant T$ *и лежащее в* Q *вместе с* ρ-*окрестностью.*

Тогда для любых положительных чисел T и η существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что решение $x_i(t)$ системы (7), *совпадающее с $u_i(t)$ при $t = 0$, отличается от $u_i(t)$ меньше чем на η на всем интервале $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$:*

$$|x_i(t) - u_i(t)| < \eta$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ $(\varepsilon > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1971.
2. И. И. Гихман, По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова, т. 4, № 2, 1952.
3. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1971.
4. Я. В. Быков, О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1957.
5. О. А. Жаутиков, Принцип усреднения в нелинейной механике применительно к счетным системам уравнений, УМЖ, т. 17, № 1, 1965.

Поступила 14.II 1973 г.

Институт математики АН УССР