УДК 517.949.2

Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

З. Б. Сеидов

Рассмотрим начальную задачу:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \frac{\alpha\tau}{T} + f(t, x(t-\tau), \tau), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau}, \\ &x(t) = \varphi(t, \tau) \ (\underline{\tau} > 0), \qquad -\overline{\tau} \leqslant t \leqslant 0, \underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau}. \end{aligned} \tag{1}$$

Поставим следующую краевую задачу: найти такие значения τ из $[\underline{\tau}, \overline{\tau}]$, при которых задача (1) имеет решение, удовлетворяющее условию:

$$x(T) = x_T. \tag{2}$$

Эту задачу можно трактовать следующим образом: в описываемом физическом процессе начальный режим, скорость и фазовая координата каждой точки управляемого объекта зависят от некоторого управляющего параметра τ; требуется выбрать значение параметра τ так, чтобы объект принял заданное положение в заданный момент времени.

Отметим, что подобная задача изучена также в [1, 2].

В данной заметке рассматриваются достаточные условия для разрешимости и сходимости некоторых итерационных процессов к решению рассматриваемой задачи.

1. Сначала для задачи (1), (2) построим итерационный процесс:

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\tau_n t}{T} + x_0 + \displaystyle\int_0^t f(s, x_n(s-\tau_n), \tau_n)\, ds, & 0 \leqslant t \leqslant T, \ n = 0, 1, \ldots, \\ \varphi(t, \tau_{n+1}), & -\overline{\tau} \leqslant t \leqslant 0, \ n = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

$$\tau_{n+1} = \frac{x_T - x_0}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T f(s, x_n(s-\tau_n), \tau_n)\, ds, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{4}$$

здесь $\tau_0 \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$, $x_0(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и $|x_0(t) - x_0| \leqslant r$.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, x, \tau)$ непрерывна в области*

$$R = [0, T] \times [x_0 - r, x_0 + r] \times [\underline{\tau}, \overline{\tau}] \;\; и \;\; |f(t, x, \tau)| \leqslant M,$$

$$|f(t, x_1, \tau_1) - f(t, x_2, \tau_2)| \leqslant L(|x_1 - x_2| + |\tau_1 - \tau_2|).$$

Начальная функция $\varphi(t, \tau)$ непрерывна при $t \in [-\overline{\tau}, 0]$, $\tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$, $\varphi(0, \tau) = x_0$

$$|\varphi(t, \tau_1) - \varphi(t, \tau_2)| \leqslant N|\tau_1 - \tau_2|.$$

Наконец, $\forall \tau \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$ и $\forall$ непрерывной на $[0, T]$ функции $x(t)$ $(|x(t) - x_0| \leqslant r)$

$$\frac{x_T - x_0 - \int\limits_0^T f(s, x(s-\tau), \tau)\, ds}{\alpha} \geqslant \underline{\tau}, \qquad |\alpha|\overline{\tau} + MT \leqslant r, \; \frac{|x_T - x_0| + MT}{|\alpha|} \leqslant \overline{\tau},$$

$$q = |\alpha| + L\left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right)(T + TM + |\alpha|\overline{\tau} + N\overline{\tau}) < 1.$$

Тогда существует решение задачи (1), (2) *и последовательные приближения* (3), (4) *сходятся к решению со скоростью*:

$$|\tau - \tau_n| + |x(t) - x_n(t)| \leqslant \frac{2\overline{\tau} + r}{1 - q} q^n. \tag{5}$$

Доказательство. В силу условия теоремы $\tau_n \in [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$, $x_n(t) \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Далее, из равенств (3) имеем

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant (|\alpha| + LT)|\tau_n - \tau_{n-1}| + L\int\limits_0^t |x_n(s - \tau_n) - x_n(s - \tau_{n-1})|\, ds + L\int\limits_0^t |x_n(s - \tau_{n-1}) - x_{n-1}(s - \tau_{n-1})|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[|\alpha| + LT\left(1 + M + \frac{|\alpha|\overline{\tau}}{T}\right)\right]|\tau_n - \tau_{n-1}| + L\int\limits_{-\overline{\tau}}^0 |\varphi(s, \tau_n) - \varphi(s, \tau_{n-1})|\, ds + L\int\limits_0^t |x_n(s) - x_{n-1}(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[|\alpha| + LT\left(1 + M + \frac{|\alpha|\overline{\tau}}{T}\right) + LN\overline{\tau}\right]|\tau_n - \tau_{n-1}| + LT\max_{0 \leqslant t \leqslant T}|x_n(t) - x_{n-1}(t)|,$$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T}|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \left[|\alpha| + LT\left(1 + M + \frac{|\alpha|\overline{\tau}}{T}\right) + LN\overline{\tau}\right] \times |\tau_n - \tau_{n-1}| + LT\max|x_n(t) - x_{n-1}(t)|.$$

Для разности $\tau_{n+1}-\tau_n$ также имеем

$$|\tau_{n+1}-\tau_n| \leqslant \frac{L}{|\alpha|}(T+TM+|\alpha|\overline{\tau}+N\overline{\tau})|\tau_n-\tau_{n-1}|+$$
$$+\frac{LT}{|\alpha|}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_n(t)-x_{n-1}(t)|.$$

Обозначая $V_{n+1}=|\tau_{n+1}-\tau_n|+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|$, получим

$$V_{n+1}\leqslant qV_n\leqslant\ldots\leqslant q^nV_1.$$

Так как $q<1$, то последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{\tau_n\}$ сходятся. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\tau$.

Переходя к пределу в равенствах (3), (4), получим

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\tau t}{T}+x_0+\displaystyle\int_0^t f(s,x(s-\tau),\tau)\,ds, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \varphi(t,\tau), & -\overline{\tau}\leqslant t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\alpha\tau+x_0+\int_0^T f(s,x(s-\tau),\tau)\,ds=x_T.$$

Последние равенства означают, что $(\tau, x(t))$ есть решение задачи (1), (2).

Легко видеть, что для скорости сходимости последовательных приближений (3), (4) справедлива оценка (5). Теорема доказана.

Замечание. Аналогично можно доказать сходимость к решению задачи (1), (2) следующего итерационного процесса:

$$x_{n+1}(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\tau_{n+1}t}{T}+x_0+\displaystyle\int_0^t f(s,x_n(s-\tau_{n+1}),\tau_{n+1})\,ds, & 0\leqslant t\leqslant T,\ n=0,1,\ldots,\\ \varphi(t,\tau_{n+1}), & -\overline{\tau}\leqslant t\leqslant 0,\ n=0,1,\ldots\end{cases}$$

$$\tau_{n+1}=\frac{x_T-x_0}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int_0^T f(s,x_n(s-\tau_n),\tau_n)\,ds,\quad n=0,1,\ldots$$

2. Решение начальной задачи (1) для каждого $\tau\in[\underline{\tau},\overline{\tau}]$ обозначим через $x(t,\tau)$. Предполагаем, что $|x(t,\tau)-x_0|\leqslant r$. Тогда имеем

$$x(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\tau t}{T}+x_0+\displaystyle\int_0^t f(s,x(s-\tau,\tau),\tau)\,ds, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \varphi(t,\tau), & -\overline{\tau}\leqslant t\leqslant 0.\end{cases}\tag{6}$$

Лемма. *Пусть непрерывные функции $f(t,x,\tau)$, $\varphi(t,\tau)$ удовлетворяют условиям*

$$|f(t,x,\tau)|\leqslant M,\quad |f(t,x_1,\tau_1)-f(t,x_2,\tau_2)|\leqslant L(|x_1-x_2|+|\tau_1-\tau_2|),$$
$$|\varphi(t,\tau_1)-\varphi(t,\tau_2)|\leqslant N|\tau_1-\tau_2|.$$

Тогда для решения уравнения (6) *справедлива оценка*

$$|x(t, \tau_1) - x(t, \tau_2)| \leqslant \exp LT \left[|\alpha| + LT \left(1 + \frac{|\alpha| \bar{\tau}}{T} + M + N\bar{\tau} \right) \right] |\tau_1 - \tau_2|.$$

Доказательство. В силу условия леммы имеем

$$|x(t, \tau_1) - x(t, \tau_2)| \leqslant (|\alpha| + LT) |\tau_1 - \tau_2| + L \int_0^t |x(s - \tau_1, \tau_2) -$$

$$- x(s - \tau_2, \tau_1)| ds + L \int_0^t |x(s - \tau_1, \tau_1) - x(s - \tau_1, \tau_2)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[|\alpha| + LT \left(1 + \frac{|\alpha| \bar{\tau}}{T} + M \right) \right] |\tau_1 - \tau_2| + LT \int_{-\bar{\tau}}^0 |\varphi(s, \tau_1) -$$

$$- \varphi(s, \tau_2)| ds + LT \int_0^t |x(s, \tau_1) - x(s, \tau_2)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \left[|\alpha| + LT \left(1 + \frac{|\alpha| \bar{\tau}}{T} + M + N\bar{\tau} \right) \right] |\tau_1 - \tau_2| + LT \int_0^t |x(s, \tau_1) - x(s, \tau_2)| ds.$$

Отсюда, применяя неравенство Беллмана — Гронуолла (см. [3]), получим

$$|x(t, \tau_1) - x(t, \tau_2)| \leqslant \exp LT \left[|\alpha| + LT \left(1 + \frac{|\alpha| \bar{\tau}}{T} + M + N\bar{\tau} \right) \right] |\tau_1 - \tau_2|.$$

Лемма доказана.

Разрешимость задачи (1), (2) эквивалентна разрешимости уравнения

$$\tau = \frac{x_T - x_0}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_0^T f(s, x(s - \tau, \tau), \tau) ds.$$

Здесь $x(t, \tau)$ — решение уравнения (6) для соответствующего значения $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы. Далее,* $\forall \tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ и $\forall$ *непрерывной функции* $x(t)$ ($|x(t) - x_0| \leqslant r$)

$$\underline{\tau} \leqslant \frac{x_T - x_0}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_0^T f(s, x(s - \tau), \tau) ds \leqslant \bar{\tau}.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет хотя бы одно решение.*

Справедливость теоремы следует из принципа Шаудера.

Теорема 3. *Пусть функции* $f(t, x, \tau)$ *и* $\varphi(t, \tau)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и* $L\bar{\tau}(1 + LTe^{LT}) + LTe^{LT} < 1$,

$$|\alpha| > \frac{L(1 + LTe^{LT})(T + TM + N\bar{\tau})}{1 - L\bar{\tau}(1 + LTe^{LT}) - LTe^{LT}}.$$

Тогда задача (1), (2) *не может иметь более одного решения в области* $\underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \bar{\tau}$, $x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r$.

Доказательство. Пусть существуют два решения задачи (1), (2): $(\tau_1, x_1(t))$, $(\tau_2, x_2(t))$. Тогда имеем

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\alpha\tau_1}{T} + f(t, x_1(t-\tau_1), \tau_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$x_1(t) = \varphi(t, \tau_1), \qquad -\bar{\tau} \leqslant t \leqslant 0, \qquad x_1(T) = x_T,$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\alpha\tau_2}{T} + f(t, x_2(t-\tau_2), \tau_2), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$x_2(t) = \varphi(t, \tau_2), \quad -\bar{\tau} \leqslant t \leqslant 0, \quad x_2(T) = x_T.$$

В силу условия теоремы получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant (|\alpha| + LT)|\tau_1 - \tau_2| + L\int_0^t |x_1(s-\tau_1) - x_1(s-\tau_2)|\,ds +$$

$$+ L\int_0^t |x_1(s-\tau_2) - x_2(s-\tau_2)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \exp LT\left[|\alpha| + LT\left(1 + M + \frac{|\alpha|\,\bar{\tau}}{T}\right) + LN\bar{\tau}\right]|\tau_1 - \tau_2|,$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \exp LT\left[|\alpha| + LT\left(1 + M + \frac{|\alpha|\,\bar{\tau}}{T}\right) + LN\bar{\tau}\right]|\tau_1 - \tau_2|.$$

Далее, краевые условия имеют вид

$$\alpha\tau_1 + x_0 + \int_0^T f(s, x_1(s-\tau_1), \tau_1)\,ds = x_T,$$

$$\alpha\tau_2 + x_0 + \int_0^T f(s, x_2(s-\tau_2), \tau_2)\,ds = x_T.$$

Отсюда имеем

$$|\tau_1 - \tau_2| \leqslant \frac{L}{|\alpha|}\,(T + TM + |\alpha|\,\bar{\tau} + N\bar{\tau})|\tau_1 - \tau_2| +$$

$$+ \frac{LT}{|\alpha|}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_1(t) - x_2(t)|.$$

Решая последние два неравенства и учитывая условие теоремы, получаем: $\tau_1 = \tau_2$, $x_1(t) \equiv x_2(t)$, что и означает единственность решения краевой задачи (1), (2).

В заключение отметим, что полученные результаты переносятся также на случай векторного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Бенсаад, С. Б. Норкин, Краевая задача с управлением в начальной функции для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Материалы 3-й Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1972.
2. З. Б. Сеидов, Краевая задача с параметром для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Ученые зап. Азерб. гос. ун-та, (сер. физ.-матем. наук), № 1, 1966.
3. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

Поступила 28.X 1972 г.,
после переработки — 12.II 1973 г.

Азербайджанский государственный университет