УДК 513.882

Биположительные проекторы в частично упорядоченном векторном пространстве ((c)-плотность и K-линеал)

В. С. Тен

В заметке [1] были введены понятия (a), (b), (c) -плотности пространства (E, K, P), частично упорядоченного с помощью линейной полугруппы K, с набором P биположительных проекторов. Известно [2], что класс P является булевой алгеброй.

1. (c) - плотность и K - линеал [3].

Теорема 1. *Пусть $P(E, K)$ — полная булева алгебра. Тогда для того чтобы пространство (E, K, P) было (c)-плотным, необходимо и достаточно, чтобы пространство (E, K, P,) было (b)-плотно и K-линеалом.*

Доказательство теоремы проведем в несколько этапов.

Лемма 1. *Если пространство (E, K, P) (b)-плотно и является K-линеалом, то оно (c)-плотно.*

Доказательство. Пусть $x \in K \setminus \{0\}$, $y \in K$, $x \nleq y$. Тогда возможны два случая: 1) если $x > y$, то $p_x x = x > y = p_x y$ и в силу свойства 2 1, б) [1], $p_x \in P(x)$, т. е. лемма верна; 2) если $x \ngtr y$, то по начальному предположению $(x \nleq y): u = x - y \in E \setminus \{K \cup (-K)\}$, следовательно, в разложении $u = u_+ - u_-$ компоненты $u_\pm > 0$. Покажем, что $p_{u_+} u_- = 0$. В противном случае из того, что $p_{u_+} u_- \in (p_{u_+} K) \setminus \{0\}$ и (b)-плотности пространства (E, K, P) следует, что существует вектор $0 < z \leqslant p_{u_+} u_-, u_+$. Но тогда $0 < v = u_+ - z < u_+$; $0 < w = u_- - z < u_-$ и $u = v - w$. Но последнее противоречит минимальности разложения u в K-линеале. Итак, показано, что $p_{u_+} u_- = 0$. Тогда $p_{u_+} u = p_{u_+} u_+ - p_{u_+} u_- = u_+ > 0$, т. е. $p_{u_+}(x - y) = u_+ > 0$, следовательно, $p_{u_+} x > p_{u_+} y$, $u_+ \leqslant x$. Из последнего неравенства следует, что $p_{u_+} \leqslant p_x$, поэтому $p_{u_+} \in P(x)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть P — полная булева алгебра. Тогда*:

1) *пространство (E, K, P) (a)-плотно в том и только в том случае, если для любого вектора $x \in K \setminus \{0\}: \inf P_x \neq 0$. В этом случае $p_x = \inf P_x$;*

2) *если пространство (E, K, P) (c)-плотно, то оно (b)-плотно.*

Лемма 3. *Пусть пространство (E, K, P) таково, что для любого вектора $x \in E$ существует проектор $p \in P$ такой, что $px, -p'x \in K$, тогда пространство (E, K, P) является K-линеалом.*

Доказательство. Пусть $x \in E$, $p \in P$ и $px, -p'x \in K$. Введем обозначения: $x_+ = px$, $x_- = -p'x$. Очевидно, что $x = x_+ - x_-$; $x_\pm \in K$. Покажем, что $x_+ \wedge x_- = 0$. В самом деле, пусть $0 \leqslant u \leqslant x_+, x_-$; тогда $u \leqslant px_+, p'x_-$, следовательно, $u = pu = p'(pu) = 0$. Покажем, что для

$x, y \in E$, если $x \geqslant y$, то $x_+ \geqslant y_+$. В самом деле, $x = x_+ - x_- \geqslant y$, следовательно, $x_+ \geqslant y$. Пусть $q \in P$ и $y_+ = qy$, тогда $x_+ \geqslant qx_+ \geqslant qy = y_+$. Докажем, что $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0 = -(x \wedge 0)$. В самом деле, если $y \geqslant x, 0$ и $x_+ = px$, то $y \geqslant py \geqslant px = x_+ \geqslant x, 0$; следовательно, $x_+ = x \vee 0$. Для x_- доказывается аналогично. Наконец, докажем, что $x \vee y = y + 0 \vee (x - y)$, тем самым будет доказана лемма 3. Пусть $x \overset{\circ}{\vee} y = y + 0 \vee (x - y)$. Поскольку $x - y = (x-y)_+ - (x-y)_- = (x-y) \vee 0 - (y-x) \vee 0$, то $x \overset{\circ}{\vee} y = y + 0 \vee (x-y) = y + (x-y) + 0 \vee (y-x) = x + 0 \vee (y-x)$, следовательно, $x \overset{\circ}{\vee} y = y \overset{\circ}{\vee} x \geqslant x, y$. Пусть далее $u \geqslant x, y$, тогда $u - y \geqslant x - y$ и $u - y = (u - y)_+ \geqslant (x - y)_+$, следовательно, $u \geqslant y + (x - y) \vee \vee 0 = x \overset{\circ}{\vee} y$, т. е. $x \overset{\circ}{\vee} y = x \vee y$.

Лемма 4. *Пусть пространство* (E, K, P) (c)-*плотно*, P — *полная булева алгебра. Если* $x, y \in K$ *и* $x \not\geqslant y$, $x \not\leqslant y$, *то существует проектор* $p \in P$ *такой, что* $px > py$, $p'x < p'y$.

Теорема 1 указывает при каких ограничениях на класс биположительных проекторов P пространство (E, K) становится линейной структурой. Имеется утверждение, в некотором смысле двойственное к теореме 1, именно, какие структурные свойства пространства (E, K) обеспечивают богатство класса $P(E, K)$.

Теорема 2. *Если* (E, K) *является* K-*пространством* (K_σ-*пространством*) *с единицей* [3], *то класс* $P(E, K)$ *является полной* (σ-*полной*) *булевой алгеброй, а пространство* (E, K, P) (c)-*плотно*.

2. Атомные проекторы. В этом пункте выясним геометрический смысл алгебраического понятия атомных элементов в булевой алгебре P [4]. Проектор $p \in P$ будем называть *атомным*, если в классе P нет отличного от нуля проектора $q \in P \setminus \{0\}$, меньшего p. Под размерностью проектора $p \in P$ будем понимать размерность отсекаемого им подпространства, т. е. $\dim p \overset{\text{d.f.}}{=} \dim (pE)$.

Теорема 3. *Пусть пространство* (E, K, P) *архимедово и* (c)-*плотно. Тогда, если для данного проектора* $p \in P : \dim p > 1$, *то* p *не является атомным проектором.*

Замечание. Утверждение теоремы 2 можно сформулировать так: классы одномерных и атомных проекторов совпадают.

Лемма 5. 1. *Пусть* (E, K) — *произвольное частично упорядоченное пространство. Если* $p \in P(E, K)$, $\dim p > 1$, *то существуют, по крайней мере, два линейно независимых положительных вектора* $x, y \in (pK) \setminus \{0\}$.

2. *Пусть* (E, K) — *архимедово*: а) *для любого* $p \in P(E, K)$ *пространство* (pE, pK) *также архимедово*; б) *если векторы* $x, y \in K \setminus \{0\}$ *линейно независимы, то существует такое действительное число* λ, *что* $x - \lambda y \in E \setminus \{K \cup \cup (-K)\}$.

Доказательство теоремы. Пусть $\dim p > 1$, что одно и то же $\dim (pE) > 1$. Тогда согласно утверждению 1 леммы 5, существуют два линейно независимых положительных вектора $x, y_1 \in (pK) \setminus \{0\}$. Поскольку пространство (pE, pK) архимедово, то согласно утверждению 2, б) леммы 5 существует такое действительное число λ, что вектор $x - \lambda y_1 \in E \setminus \{(pK \cup \cup (-pK)\}$. При этом число λ может быть только положительным, так как в противном случае $x - \lambda y_1 \geqslant 0$ и, следовательно, $y = \lambda y_1 > 0$.

Поскольку $x - y \not\leqslant 0$, то $x \not\leqslant y$, тогда в силу того, что пространство (E, K, P) (c)-плотно, существует проектор $p_1 \in P(x)$ такой, что $p_1 x > p_1 y$. Аналогично, из того, что $x \not\geqslant y$, следует существование проектора $p_2 \in P(y)$ такого, что $p_2 y > p_2 x$. Проекторы $p_1, p_2 \leqslant p$, так как $x, y \in pK$, и не равны нулю: $p_1, p_2 > 0$. Покажем, что $p_1p_2 < p_2$. Если $p_2 = p_1p_2$, то из неравенства $p_1x > p_1y$ следует, что $p_2x = p_2p_1x \geqslant p_2p_1y = p_2y$, т. е $p_2x \geqslant p_2y$ в противоречии с выбором p_2 $(p_2x < p_2y)$. Итак, $p_1p_2 < p_2$, но тогда $p \geqslant p_1 \vee p_2 = p_1 + p_2 - p_1p_2 > p_1 > 0$. Итак, доказано, что существует проектор $p_1 \in P : 0 < p_1 < p$. Теорема 3 доказана.

В заключение приведем один вариант теоремы А. И. Юдина [5 — 7].

Следствие. *Пусть пространство* (E, K, P) *(с)-плотно, архимедово, конечномерно,* $\dim E = n < \infty$. *Тогда существует ровно n атомных проекторов* $\{p_i\}_1^n \subset P$ *таких, что* $\sum_{i=1}^{n} p_i = I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Тен, Биположительные проекторы в частично упорядоченном векторном пространстве (плотность и экстремальные свойства), УМЖ, т. 25, № 4, 1973.
2. В. С. Тен, Биположительные проекторы в частично упорядоченном векторном пространстве, УМЖ, т. 24, № 2, 1972.
3. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.
4. Р. Сикорский, Булевы алгебры, «Мир», М., 1969.
5. А. И. Юдин, Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств, ДАН СССР, т. 23, № 5, 1939.
6. Bela de Sz. Nady, Sur les lattis lineaires dimension tinie, Commentairi Mathematici Helvatici, 17, 1944—1945, 209—213.
7. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, т. 3, вып. 1 (23), 1948.

Поступила 30.XII 1971 г.

Институт прикладной математики и механики АН УССР