УДК 517.521.8

Обобщение теоремы Агнью и о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей

Г. А. Михалин

Следующее утверждение принадлежит Агнью [1].

Т е о р е м а А. *Если T-матрица* $A = \| a_{nk} \|$ *удовлетворяет условию*

$$| a_{nn} | - \sum_{k \neq n} | a_{nk} | \geqslant \gamma > 0 \text{ для } n > N, \tag{1}$$

где γ — *постоянная, не зависящая от* n, *то она не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.*

В данной заметке доказывается утверждение, обобщающее теорему А на K-матрицы, и с помощью этого утверждения получены некоторые теоремы о равносильности методов Кожима методам Чезаро суммирования рядов на множестве ограниченных последовательностей. В вопросе определений и обозначений будем придерживаться работы [2].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет условию* (1), *то она не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности.*

Доказательство. Пусть $\{S_n\}$ — произвольная ограниченная расходящаяся последовательность. Тогда $\overline{S} \equiv \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | S_n | > 0$.

Рассмотрим сначала последовательности $\{S_n\}$, удовлетворяющие условию

$$| S_n | \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} | S_n | = \overline{S} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как $\overline{S} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} | S_n |$, то существует последовательность $\{S_{n_i}\}$ последовательности $\{S_n\}$ такая, что $| S_{n_i} | \to \overline{S} \, (i \to \infty)$. Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $| S_{n_i} | > \overline{S} - \varepsilon$ для $i > N(\varepsilon)$. Если $i > N(\varepsilon)$, то

$$| t_{n_i} | = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_i k} S_k \right| \geqslant | a_{n_i n_i} S_{n_i} | - \sum_{k \neq n_i} |a_{n_i k} S_k| \geqslant \overline{S} \Bigl(|a_{n_i n_i}| -$$

$$- \sum_{k \neq n_i} |a_{n_i k}| \Bigr) - \varepsilon | a_{n_i n_i} | \geqslant \overline{S} \gamma - \varepsilon | a_{n_i n_i} |,$$

и если $\varepsilon > 0$ — достаточно мало, то

$$| t_{n_i} | \geqslant \frac{1}{2} \gamma \overline{S} > 0. \tag{3}$$

Из неравенства (3) следует, что K-матрица $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющая условию (1), не может суммировать к нулю ограниченные расходящиеся последовательности, которые удовлетворяют условию (2).

Рассмотрим теперь произвольную ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_n\}$. Обозначим через F множество всех частичных пределов этой последовательности. Легко видеть, что F — замкнутое множество, содержащее более одной точки. Пусть K — замкнутая выпуклая оболочка множества F, т. е. наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее F. Те члены последовательности $\{S_n\}$, которые не принадлежат K, обозначим через S_{m_ν}. Обозначим через ρ_γ расстояние точки S_{m_ν} от K. Так как K — замкнутое множество, то существует точка $z_{m_\nu} \in K$ такая, что $\rho_\nu = \rho(z_{m_\nu}; S_{m_\nu})$. Ясно, что $\rho_\nu \to 0 \, (\nu \to \infty)$.

Рассмотрим последовательности $\{S'_n\}$ и $\{S''_n\}$, которые определим так. Если все S_n принадлежат K, то $S''_n = 0$, $S'_n = S_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Если же существуют члены S_{m_ν} последовательности $\{S_n\}$, которые не принадлежат K, то

$$S'_n = \begin{cases} S_n, & \text{если } n \neq m_\nu, \\ z_{m_\nu}, & \text{если } n = m_\nu, \end{cases} \qquad S''_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m_\nu, \\ S_{m_\nu} - z_{m_\nu}, & \text{если } n = m_\nu \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что $S''_n \to 0 \ (n \to \infty)$, $S'_n \in K$ и

$$S_n = S'_n + S''_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Допустим, что ограниченная расходящаяся последовательность $\{S_n\}$ суммируется K-матрицей $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющей условию (1), к числу S. Тогда из (4) следует, что K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{S'_n\}$ к некоторому числу S'. Заметив, что в силу (1) число $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} \neq 0$, рассмотрим последовательность $S^*_n = S_n - \dfrac{S'}{\tau}$. Тогда

$$S^*_n = S'_n - \frac{S'}{\tau} + S''_n = S'''_n + S''_n$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S'''_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S'_k - \frac{S'}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Обозначим через K^* замкнутую выпуклую оболочку множества частичных пределов последовательности $\{S^*_n\}$. Очевидно, что $S'''_n \in K^* \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Покажем, что последовательность $\{S'''_n\}$ удовлетворяет условию

$$| S'''_n | \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \, | S'''_n | \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Так как K^* — ограниченное замкнутое множество, то существует точка $z^* \in K^*$ такая, что

$$| z^* | = \max_{z \in K^*} | z |. \tag{6}$$

Множество K^* может быть или отрезком или ограниченной замкнутой выпуклой областью, отличной от отрезка, с границей Γ_{K^*}. В случае отрезка будем отождествлять Γ_{K^*} с этим отрезком. Таким образом, $z^* \in \Gamma_{K^*}$.

Неравенство (5) будет доказано, если покажем, что z^* является частичным пределом последовательности $\{S'''_n\}$.

Из определения числа z^* следует утверждение о том, что z^* не может быть внутренней точкой отрезка прямой, который является частью Γ_{K^*}. Этим (5) доказано для случая, когда K^* — отрезок. Предположим, что z^* не является частичным пределом последовательности $\{S'''_n\}$ и K^* — замкнутая выпуклая область. Тогда существует δ-окрестность точки z^*, содержащая лишь конечное число членов последовательности $\{S'''_n\}$, а следовательно, и $\{S^*_n\}$. Соединив точки пересечения границы δ- окрестности точки z^* с Γ_{K^*}, получим замкнутое выпуклое множество, содержащее все предельные точки последовательности $\{S^*_n\}$ и являющееся меньшим K^*. Это противоречит тому, что K^* — замкнутая выпуклая оболочка множества частичных пределов последовательности $\{S^*_n\}$. Неравенство (5) доказано.

Таким образом, если допустить, что ограниченная расходящаяся последовательность $\{S_n\}$ суммируется K- матрицей $A = \| a_{nk} \|$, удовлетворяющей условию (1), то получим, что эта K- матрица суммирует к нулю ограниченную расходящуюся последовательность $\{S'''_n\}$, которая удовлетворяет условию (5), а это по доказанному выше невозможно. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет условиям:*

1) $k^{p-1} a_{nk} \to 0$ $(k \to \infty)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{k} | \Delta^p a_{nk} | < H$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

где H не зависит от n;

3) $\binom{n+p}{n} | \Delta^p a_{nn} | - \sum\limits_{k \neq n} \binom{k+p}{k} | \Delta^p a_{nk} | \geqslant \gamma > 0$ *для* $n > N$,

где γ не зависит от n, p—натуральное число и $\Delta^p a_{nk} = \sum\limits_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu C_p^\nu a_{n,k+\nu}$.

Тогда метод суммирования, определяемый матрицей $A = \| a_{nk} \|$, K-равносилен методу Чезаро порядка p на множестве ограниченных последовательностей.

Теорема 3. *Пусть K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет трем условиям:*

1) $\Delta^p a_{nk} \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $k^p a_{nk} \to 0$ $(k \to \infty)$;

3) $\varliminf\limits_{n \to \infty} (n^p \Delta^p a_{nk}) > \dfrac{p! \, \alpha}{2}$,

где p — натуральное число, $\Delta^p a_{nk} = \sum\limits_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu C_p^\nu a_{n,k+\nu}$ и $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$. *Тогда метод суммирования, определяемый матрицей $A = \| a_{nk} \|$, K-равносилен методу Чезаро порядка p на множестве ограниченных последовательностей.*

Теоремы 2 и 3 переносят на K-матрицы соответствующие теоремы Н. А. Давыдова, доказанные им для T-матриц [3]. Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам теорем Н. А. Давыдова, и поэтому они не приводятся.

Следствие. *Если K-матрица $A = \| a_{nk} \|$ удовлетворяет двум условиям:*

1) $a_{nk} \geqslant a_{n,k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots)$;

2) $\varliminf\limits_{n \to \infty} [n (a_{nn} - a_{n,n+1})] > \dfrac{\alpha}{2}$,

где $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, то метод суммирования, определяемый этой матрицей, K-равносилен методу средних арифметических на множестве ограниченных последовательностей.

Автор выражает благодарность Н. А. Давыдову за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Agnew, Equivalence of methods for evaluation of sequences, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 550—565.
2. Н. А. Давыдов, О включении и равносильности методов Кожима суммирования рядов, УМЖ, т. 19, № 4, 1967.
3. Н. А. Давыдов, О включении и равносильности методов Теплица суммирования рядов, УМЖ, т. 20, № 4, 1968.

Поступила 11.I 1972 г.
Киевский педагогический институт