УДК 517.5

О полноте в аналитических пространствах систем вырожденных гипергеометрических функций

И. Ф. Кушнирчук, Н. П. Олийнык

Вырожденная гипергеометрическая функция $\mathfrak{F}(\alpha, \gamma; z)$ определяется [1] как сумма всюду сходящегося степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!\,(\gamma)_k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}z^k \tag{1}$$

(здесь $\gamma \neq -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $(\alpha)_0 = (\gamma)_0 = 1$). Она удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0 \tag{2}$$

и поэтому является собственной функцией дифференциального оператора

$$F=zD^2+(\gamma-z)D,\quad D=\frac{d}{dz}, \tag{3}$$

которая соответствует собственному значению α. Если α равно целому отрицательному числу $-m$, то ряд (1) обрывается и функция $\mathfrak{F}(-m, \gamma; z)$ превращается в многочлен степени m. Например, классические многочлены Лагерра $L_m^{\beta}(z)$ и Эрмита $H_m(z)$ следующим образом связаны с функцией $\mathfrak{F}(\alpha, \gamma; z)$ (см. [1]):

$$L_m^{\beta}(z) = \frac{(\beta+1)_m}{m!}\,\mathfrak{F}(-m, \beta+1; z);$$

$$H_{2m}(z) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}\,\mathfrak{F}\left(-m, \frac{1}{2}; z^2\right),$$

$$H_{2m+1}(z) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!}\,2z\mathfrak{F}\left(-m, \frac{3}{2}; z^2\right).$$

Отметим, что полнота подпоследовательностей этих многочленов в пространствах A_R однозначных аналитических в круге $|z| < R$ $(0 < R \leqslant +\infty)$ функций исследовалась ранее в работах [2—5].

В данной заметке, следуя [5], устанавливается несколько достаточных условий полноты в пространствах A_R системы $\{\mathfrak{F}(\alpha_n, \gamma; z)\}_{n=1}^{\infty}$ вырожденных гипергеометрических функций (здесь $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность комплексных чисел).

1. Рассмотрим еще оператор

$$F_0 = zD^2 + \gamma D \tag{4}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Операторы F и F_0, определенные равенствами* (3) и (4), *линейно эквивалентны в каждом пространстве A_R $(R > 0)$, т. е. существует изоморфизм T этого пространства, удовлетворяющий равенству: $FT = TF_0$.*

Доказательство. В силу непрерывности операторов F и F_0 в любом A_R $(R > 0)$ достаточно проверить, что соответствующие им в степенном базисе матрицы $[F]$ и $[F_0]$ подобны в A_R [6]. Так как $F1 = 0$, $Fz^k = k(k+\gamma-1)z^{k-1} - kz^k$, $k = 1, 2, \ldots$, то матрица $[F] = [f_{ik}]_0^{\infty}$ оператора F является верхней квазитреугольной конечного порядка [7], причем $f_{ii} = -i$, $g_i = f_{i,i+1} = (i+1)(i+\gamma)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, а все остальные элементы $f_{ik} = 0$. Отличными от нуля элементами g_i матрицы $[F_0]$ являются элементы первой лежащей выше главной и параллельной ей диагонали. Поэтому подобие этих матриц в пространствах A_R $(R > 0)$ следует из приведенных ниже лемм, доказанных в [7].

Лемма 1. *Пусть* $s = \varlimsup\limits_{i\to\infty} \sup\limits_{k \leqslant i-1} \left|\dfrac{g_k}{g_i}\right| < +\infty$ *и выполняются равенства:*

$$l_1 = \lim_{i\to\infty} \sup_{k \leqslant i-1} \left|\frac{f_{ik}}{g_i}\right| = 0, \quad l_2 = \lim_{i\to\infty} \sup_{j \leqslant i} \left|\frac{f_{jj}}{g_i}\right| = 0.$$

Тогда матрицы $[F]$ и $[F_0]$ подобны в пространстве A_{∞}.

Лемма 2. *Если $s = 1$ и $l_2 = 0$, то матрицы $[F]$ и $[F_0]$ подобны в любом пространстве A_R $(0 < R < +\infty)$.*

При этом изоморфизм T можно выбрать так, чтобы для любой функции $f(z) \in A_R$ сохранялось начальное значение: $Tf(z)|_{z=0} = f(0)$.

Обозначим собственную функцию оператора F_0, соответствующую собственному значению α, через $\psi(z; \alpha)$. Тогда $\mathfrak{F}(\alpha, \gamma; z) = T\psi(z; \alpha)$, так как собственные функции эквивалентных операторов, соответствующие одному и тому же собственному значению α, преобразуются друг в друга с помощью изоморфизма T.

2. Определим собственные функции $\psi(z;\alpha)$ оператора F_0, т. е. найдем нетривиальные решения уравнения $F_0\psi(z;\alpha)=\alpha\psi(z;\alpha)$. Пусть $\psi(z;\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j z^j$, тогда для определения ψ_j получим рекуррентные соотношения: $\gamma\psi_1=\alpha\psi_0$, $g_j\psi_{j+1}=\alpha\psi_j$, $j=1, 2, \ldots$. Если положить $\psi_0=1$, то $\psi_1=\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha}{g_0}$, $\psi_2=\frac{\alpha^2}{g_0 g_1}, \ldots, \psi_j=\frac{\alpha^j}{g_0 g_1 \ldots g_{j-1}}, \ldots$. Таким образом, $\psi(z;\alpha)=$ $=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\alpha z)^j$, где $\varphi_0=\psi_0=1$, $\varphi_j^{-1}=g_0 g_1 \ldots g_{j-1}=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+j-$ $-1)\cdot 1\cdot 2\ldots j=(\gamma)_j j!$, $j=1, 2, \ldots$. Итак, собственные функции оператора F_0 получаются из функции $\varphi(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j\zeta^j$ заменой ζ на αz, т. е. $\psi(z;\alpha)=\varphi(\alpha z)$. Нетрудно также убедиться, что $\varphi(\zeta)$ является целой функцией порядка роста $\frac{1}{2}$ и типа 2. Но для систем функций $\{\varphi(\alpha_n z)\}_{n=1}^{\infty}$ известны [8, 9] достаточные условия полноты в A_R. Так как свойство полноты сохраняется при изоморфизмах пространства A_R, то эти же условия будут достаточны для полноты в A_R систем $\{\mathfrak{F}(\alpha_n, \gamma; z)\}_{n=1}^{\infty}$ вырожденных гипергеометрических функций. Получаем (см [8, стр. 421, теорема 4.33]) следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $M(r)=\max\limits_{|\zeta|\leqslant r}|\varphi(\zeta)|$, $n(r)$ — *функция плотности последовательности комплексных чисел* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $N(r)$ — *функция Неванлинна той же последовательности. Тогда система гипергеометрических функций* $\{\mathfrak{F}(\alpha_n, \gamma; z)\}_{n-1}^{\infty}$ *полна в круге* $|z|<R$, *если* $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{N(r)}{\ln M\left(\frac{rR}{\theta}\right)}>1$ *или* $\ln M\left(\frac{rR}{\theta}\right)<C(\theta)\,n(r)$, $C(\theta)<\ln\frac{1}{\theta}$ (θ — *фиксированное число интервала* $(0, 1)$).

Ограничимся формулировкой еще одной теоремы, которая получается на основании теоремы II_4 [9, стр. 591].

Теорема 3. *Если* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность комплексных чисел, расположенных в углу с вершиной в начале координат раствора* 2δ, $0\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2}$, *то система гипергеометрических функций* $\{\mathfrak{F}(\alpha_n, \gamma; z)\}_{n=1}^{\infty}$ *полна в круге* $|z|<R$ *с* $R<\left(\frac{\pi}{2}d\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$, *где* $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{|\alpha_n|}}$.

Замечание. Аналогичные результаты можно получить для систем обобщенных гипергеометрических функций ${}_p\mathfrak{F}_q\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_q\end{matrix}; z\right)$ (см. [1]) в том случае, когда $p\leqslant q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М.—Л., 1963.
2. Ю. А. Казьмин, О подпоследовательностях полиномов Эрмита и Лагерра, Вестник Моск. ун-та, матем., мех., № 2, 1960.
3. В. В. Рындина, О приближении полиномами Лагерра в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 26, № 1, 1962.

4. Н. И. Нагнибида, К вопросу о полноте подпоследовательностей полиномов Эрмита, Сиб. матем. ж., т. 8, № 1, 1967.
5. Н. И. Нагнибида, К вопросу о полноте в аналитических пространствах подпоследовательностей полиномов Лагерра и Якоби, Матем. заметки, т. 7, вып. 3, 1970.
6. К. М. Фишман, О подобии некоторых классов строчно-финитных матриц в аналитических пространствах в круге, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Изд. ХГУ, вып. 13, 1971.
7. К. М. Фишман, О подобии диагональных матриц конечного порядка в пространствах целых функций и его сопряженном, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексных переменных, Харьков, 1971.
8. И. И. Ибрагимов, Методы теории интерполяции и некоторые их применения, «Наука», М., 1971.
9. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, «Наука», М., 1968.

Поступила 25.IX 1972 г.
Черновицкий государственный университет