УДК 519.41/47

Об одном обобщении вполне факторизуемых групп

П. П. Барышовец

В работе [1] поставлена общая проблема изучения строения групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп. Конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, изучал еще Ф. Холл [2]. Позднее в работе [3] полностью описаны и произвольные (без предположения об их конечности) группы такого рода, получившие название вполне факторизуемых групп. Ряд работ (см. [4]) посвящен изучению групп с той или иной системой дополняемых подгрупп, отличной, вообще говоря, от системы всех подгрупп.

Автору этой заметки С. Н. Черников поставил задачу описания строения произвольных неабелевых групп, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп. Конечные неабелевы группы, удовлетворяющие этому условию, описаны в работе [5]. Бесконечные неабелевы группы с дополняемыми коммутантами собственных подгрупп изучались автором при дополнительном условии локальной разрешимости (см. [6]). Оказалось, что локально нильпотентные (а значит, и нильпотентные) неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, конечны и исчерпываются примарными группами Миллера—Морено (так обычно называют конечные неабелевы группы, все подгруппы которых абелевы). Произвольные (как конечные, так и бесконечные) ненильпотентные группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, были названы в работе [5] DSC-группами. Локально разрешимые DSC-группы весьма существенно отличаются по своему строению от локально нильпотентных групп с дополняемыми коммутантами собственных подгрупп. Прежде чем сформулировать основной результат, относящийся к локально разрешимым DSC-группам (см. [6]), дадим следующее определение.

Пусть G — произвольная группа. Минимальный нормальный делитель L группы G будем называть обобщенно K-примитивным нормальным делителем группы G, если никакая собственная нетривиальная подгруппа группы L не является коммутантом какой-либо подгруппы группы G. Обобщенно K-примитивный нормальный делитель L группы G будем называть K-примитивным нормальным делителем этой группы, если подгруппа L содержится в коммутанте G' группы G. Если $G' = L$, то коммутант G' группы G будем называть K-примитивным, а группу G—группой с K-примитивным коммутантом.

Теорема. *Локально разрешимая ненильпотентная группа G тогда и только тогда является DSC-группой, когда ее коммутант G' абелев, дополняем в ней и разлагается в прямое произведение конечных K-примитивных нормальных делителей группы G.*

Из сопоставления приведенной здесь теоремы с результатами Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах (см. [3]) непосредственно усматривается, что строение локально разрешимых DSC-групп вполне аналогично строению ненильпотентных вполне факторизуемых групп; в то же время класс локально разрешимых DSC-групп существенно шире класса нenильпотентных вполне факторизуемых групп. Поэтому представляет определенный интерес вопрос о перенесении некоторых результатов, относящихся ко второму из этих классов на группы более широкого первого класса.

В данной заметке в качестве таких результатов взяты два следующих предложения.

1. Если группа G разлагается в полупрямое произведение $G = A \rightthreetimes B$ абелевой подгруппы A, являющейся прямым произведением инвариантных в G циклических подгрупп простых порядков, и вполне факторизуемой подгруппы B, то группа G вполне факторизуема.

Это предложение установлено в работе [7].

2. Произвольная вполне факторизуемая группа изоморфно вложима в полное прямое произведение конечных групп, порядки элементов которых не делятся на квадраты простых чисел.

Для конечных групп это предложение установлено в работе [2], для произвольных групп — в работе [3].

Замечание 1. Там, где рассматриваются группы только конечные или только бесконечные, это будет специально оговорено; во всех остальных случаях, употребляя название «группа», имеем в виду произвольную группу (конечную или бесконечную).

Собственная подгруппа группы G — это подгруппа, отличная от G; нетривиальная подгруппа — это подгруппа, содержащая отличные от единицы элементы группы.

1. Предложение 1 обобщается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если неабелева группа G разлагается в полупрямое произведение $G = A \rightthreetimes B$ абелевой подгруппы A, являющейся прямым произведением конечных обобщенно K-примитивных нормальных делителей группы G, и подгруппы B, которая является либо абелевой группой, либо локально разрешимой DSC-группой, то G — локально разрешимая DSC-группа.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда B — локально разрешимая DSC-группа. Пусть L — произвольный множитель указанного в условии теоремы прямого разложения подгруппы A. Так как L — минимальный нормальный делитель группы G, то либо подгруппа L содержится в коммутанте G' группы G, либо имеет с ним тривиальное пересечение. В последнем случае она, очевидно, содержится в центре $Z(G)$, группы G. Обозначим произведение множителей указанного выше разложения подгруппы A, содержащихся в центре группы G, через A_1. Тогда, очевидно, $G = A_1 \times (A_2 \rightthreetimes B)$, причем $A_2 \subset G'$ и, значит, $A_2 \subset (A_2 \rightthreetimes B)'$. Нетрудно убедиться, что $(A_2 \rightthreetimes B)' = A_2 \rightthreetimes B'$, где B' — коммутант группы B. Используя далее теорему о локально разрешимых DSC-группах, можно показать, что $A_2 \rightthreetimes B'$ — абелева группа. Так как подгруппа $A_2 \rightthreetimes B'$ дополняема, очевидно, в группе $A_2 \rightthreetimes B$ и разлагается в прямое произведение K-примитивных нормальных делителей группы $A_2 \rightthreetimes B$, то ввиду той же теоремы $A_2 \rightthreetimes B$ — DSC-группа. Отсюда ввиду соотношения $G = A_1 \times (A_2 \rightthreetimes B)$ вытекает, что G — DSC-группа. Локальная разрешимость группы G вытекает из абелевости группы $A_2 \rightthreetimes B'$.

Случай, когда B — абелева группа, рассматривается аналогично предыдущему. Теорема доказана.

2. Для того, чтобы обобщить предложение 2, сформулируем сначала следующие леммы.

Лемма 1. *Дополнение B к коммутанту G' локально разрешимой DSC-группы G совпадает со своим нормализатором в G.*

Это утверждение нетрудно получить, пользуясь приведенной выше теоремой о DSC-группах. Заметим только, что существование подгруппы B вытекает из этой теоремы.

Лемма 2. *Пусть G — локально разрешимая DSC-группа. Если A —*

произвольный нормальный делитель группы G, не содержащий ее коммутанта G', то фактор-группа G/A является DSC-группой.

Доказательство этой леммы сводится к рассмотрению следующих трех случаев: 1) нормальный делитель A группы G является собственной подгруппой ее коммутанта G'; 2) $A \cap G' = 1$ и 3) A — произвольный нормальный делитель группы G, не содержащий коммутанта G'. Рассуждения, проводимые в каждом из перечисленных случаев, несложны и мы их опускаем.

Теорема 3. *Произвольная локально разрешимая DSC-группа G изоморфна подгруппе полного прямого произведения периодических групп A_α следующих типов: 1) A_α — примарная циклическая группа; 2) A_α — квазициклическая группа; 3) A_α — конечная группа с дополняемым К-примитивным коммутантом и тривиальным центром.*

Доказательство. Пусть G — локально разрешимая DSC-группа. Каждому элементу $1 \neq x \in G$ поставим в соответствие максимальный нормальный делитель G_x группы G, не содержащий элемента x и рассмотрим фактор-группы G/G_x. Возможны два случая:

а) x — элемент коммутанта G' группы G. Используя леммы 1 и 2, нетрудно провести рассуждения из работы [3, стр. 294, 295], относящиеся к группе G/G_{A_α}, для группы G/G_x. Тем самым убедимся, что G/G_x — группа типа 3) теоремы 3.

б) $x \overline{\in} G'$. В этом случае коммутант G' содержится по крайней мере в одном максимальном нормальном делителе группы G, не содержащем элемента x. Обозначим такой нормальный делитель группы G через G_x. Фактор-группа G/G_x абелева и ее элемент $G_x x$ должен иметь простой порядок, так как иначе прообраз любой собственной нетривиальной подгруппы группы $\{G_x x\}$ будет ввиду соотношения $G_x \supset G'$ нормальным делителем группы G, не содержащим элемента x и строго содержащим подгруппу G_x. Если G_1/G_x — любая собственная нетривиальная подгруппа группы G/G_x, то $G_1/G_x \supset \supset \{G_x x\}$, иначе снова получаем противоречие с выбором подгруппы G_x. Отсюда вытекает, что G/G_x — абелева примарная группа, не разложимая в прямое произведение своих собственных подгрупп. Следовательно, G/G_x либо примарная циклическая группа, либо квазициклическая группа.

Поставим в соответствие каждому элементу $x \in G$ элемент $\bar{x} = \prod\limits_{1 \neq y \in G} G_y x$ полного прямого произведения групп G/G_y, где G_y — указанный выше максимальный нормальный делитель группы G, не содержащий элемент y (здесь $\prod\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$ — прямое произведение групп A_α, $\alpha \in M$). Это соответствие определяет гомоморфное отображение группы G в полное прямое произведение $\widetilde{\prod\limits_{1 \neq y \in G}} G/G_y$ групп G/G_y. Ядро этого гомоморфизма совпадает, очевидно, с пересечением подгрупп G_y, $y \in G$. Так как последнее тривиально, то группа G изоморфно отображается в указанное выше произведение. Теорема доказана.

Следствие. *Финитно аппроксимируемая локально разрешимая DSC-группа изоморфна подгруппе полного прямого произведения конечных групп A_α следующих типов:*

1) *A_α — примарная циклическая группа,*

2) *A_α — группа с дополняемым К-примитивным коммутантом и тривиальным центром.*

Замечание 2. Существуют не финитно аппроксимируемые локально разрешимые DSC-группы; например, прямое произведение ненильпотентной группы Миллера—Морено и абелевой не финитно аппроксимируемой группы.

Автор выражает благодарность С. Н. Черникову, под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб., т. 35(77), вып. 3, 1954.
2. Ph. Hall, Complemented groups, J. London Math. Soc., 12, 1937, 201—204.
3. Н. В. Черникова, Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб., т. 39(81), вып. 3, 1956.
4. Группы с системами дополняемых подгрупп, сб., Изд. Института математики, К., 1972.
5. П. П. Барышовец, Конечные неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, ДАН СССР, т. 209, № 2, 1973.
6. П. П. Барышовец, Неабелевы группы, в которых дополняемы коммутанты всех собственных подгрупп, Тезисы сообщений, XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум, т. 5, Свердловск, 1973.
7. Н. В. Черникова, К основной теореме о вполне факторизуемых группах, Группы с системами дополняемых подгрупп, Изд. Института математики АН УССР, К., 1972.

Поступила 15.XI 1973 г.

Институт математики АН УССР