УДК 517.934

О локальной топологической эквивалентности в окрестности неподвижной точки некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

Н. Б. Миронов

В данной работе рассматривается вопрос о топологической эквивалентности в окрестности неподвижной точки систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) \tag{1}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{2}$$

где x, y, $f(x)$ — n-мерные векторы, A — $n \times n$-матрица. В случае непрерывной функции $f(x)$ решение этой проблемы дает известная теорема Гробмана [1]. Мы рассматриваем случай разрывной функции $f(x)$.

Определим, следуя [2], решение системы (1). Пусть $f(x)$ измерима в некоторой области $D \subset R^n$ и почти для всех $x \in D$ $\|f(x)\| \leqslant R$. Обозначим через $S(x, \delta)$ шар с центром в точке $x \in D$ радиуса $\delta > 0$:

$$S(x, \delta) = \{y : \|x - y\| \leqslant \delta\}.$$

Функция

$$f(x, \delta) = \frac{1}{\mu(S(x, \delta))} \int\limits_{S(x,\delta)} f(\xi)\, d\xi$$

определена, непрерывна и ограничена той же постоянной R для всех $x \in D_\delta$ $|D_\delta = \{x : S(x, \delta) \subset D\}|$ и для всех $\delta > 0$. Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \delta), \quad x(0) = x_0. \tag{3}$$

Ее решение будем обозначать через $x(t, x_0, \delta)$.

Определение. «Усредненным» решением (в дальнейшем просто решением) задачи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x). \quad x(0) = x_0 \tag{4}$$

назовем любой равномерный предел любой последовательности $\{x(t, x_0, \delta_n)\}$ при $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$, решений задач (3).

Решение будем обозначать, как обычно, через $x(t, x_0)$. Решение в смысле данного выше определения всегда является решением Филиппова [3], но не наоборот. Соответствующий пример имеется в [2]. Из результатов работы [4] следует, что локально решение задачи (4) всегда существует.

В работе [2] доказано следующее утверждение о продолжимости решений системы (1) на полуось $[0, +\infty)$.

Теорема 1. *Если для почти всех $x \in D$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|f(x)\| \leqslant N\|x\| + M.$$

то каждое решение системы (1) *определено на полуоси* $[0, +\infty)$.

Для непрерывной функции $f(x)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если действительные части всех собственных чисел матрицы A отличны от нуля, $f(0)=0$, и в некоторой области G_1 непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant L\|x-y\|+M, \quad M \geqslant 0,$$

с достаточно малыми постоянными L и M, то системы (1) *и* (2) *локально гомеоморфны в областях G_1 и G_2, где G_2 — некоторая область, содержащая точку $y=0$. Гомеоморфизм, переводящий решения системы* (1) *в решения системы* (2), *определяется соотношением*

$$\Phi(x)=x-\int_{-\infty}^{0} Y_1(-\tau) f(x(\tau, x))\, d\tau+\int_{0}^{+\infty} Y_2(-\tau) f(x(\tau, x))\, d\tau,$$

где $Y_1(t)$ — матрица, полученная из $Y(t)$ заменой столбцов с положительными показателями столбцами из нулей, а $Y_2(t)=Y(t)-Y_1(t)$, ($Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (2)).

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательство теоремы Гробмана [1].

Сформулируем и докажем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть измеримая функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существуют измеримая функция $\varphi(\xi)$ (такая, что $\int_E \varphi(\xi)\, d\xi \leqslant c\mu E$, $E \subset G_1$, μE — мера области E, $c=\mathrm{const}$) и постоянные L и M такие, что*

$$\|f(x+y)-f(x)\| \leqslant \varphi(x)(L\|y\|+M)$$

почти для любых $x, y \in G_1$, таких, что $x+y \in G_1$, где G_1 — некоторая область, $G_1 \subset D$, $0 \in G_1$;

2) $\int_{S(0,\delta)} f(\xi)\, d\xi=0$ для всех $\delta>0$ таких, что $S(0, \delta) \subset G_1$.

Тогда, если действительные части собственных значений матрицы A отличны от нуля, а величина cL достаточно мала (степень ее малости определяется теоремой 2), то системы (1) *и* (2) *гомеоморфны в областях G_1* и *G_2, где G_2 — некоторая область такая, что $0 \in G_2$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если x, y и δ таковы, что $S(x, \delta)$, $S(y, \delta) \subset G_1$, то функция $f(x, \delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, \delta)-f(y, \delta)\| \leqslant cL\|x-y\|+M. \tag{5}$$

Обозначим через $Y(t)$ матрицу Коши системы (2). Столбцы матрицы $Y(t)$ являются решениями системы (2) и расположены в порядке возрастания показателей λ_k, $Y_1(t)$ — матрица, полученная из $Y(t)$ заменой столбцов с положительными показателями столбцами из нулей, $Y_2(t)=Y(t)-Y_1(t)$. Ясно, что если $\lambda_n<0$, то $Y_1(t)=Y(t)$, $Y_2(t)=0$, если же $\lambda_1>0$, то $Y_1(t)=0$, $Y_2(t)=Y(t)$.

Очевидно, что всегда существуют числа b, α и β такие, что

$$\|Y_1(t)\| \leqslant b e^{-\alpha t} \text{ при } t \geqslant 0, \quad \|Y_2(t)\| \leqslant b e^{\beta t} \text{ при } t \leqslant 0. \tag{6}$$

Построим теперь непрерывную функцию $F(x, \delta)$, удовлетворяющую условиям (5) во всем пространстве R^n, совпадающую с $f(x, \delta)$ в области G_1 и такую, что $F(x, \delta) \equiv 0$ для всех x, $\|x\|>R$. Существование такой функции следует из теоремы о продолжении функций.

Далее будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt}=Ax+F(x, \delta). \tag{7}$$

В области G_1 система (7) совпадает с системой (3).

Пользуясь результатами работы [5], легко показать, что система (7) имеет решения трех типов:

1) 0^+-кривые, ограниченные при $t \to \infty$ и стремящиеся к ∞ при $t \to -\infty$;

2) 0^--кривые, уходящие в бесконечность при $t \to +\infty$ и ограниченные при $t \to -\infty$;

3) седловые кривые, не ограниченные как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Для 0^+ -кривых справедлива оценка

$$\| x(t) \| \leqslant \left[\| x_0 \| - \frac{M}{\gamma} \right] c e^{-\gamma (t - t_0)} + \frac{M}{\gamma}$$

для $t \geqslant t_0$ и некоторых γ, $c > 0$, $0 > -\gamma > -\alpha$. Аналогично, для 0^--кривых

$$\| x(t) \| \leqslant \left[\| x_0 \| - \frac{M}{\varepsilon} \right] c e^{\varepsilon (t - t_0)} + \frac{M}{\varepsilon}$$

для $t \leqslant t_0$ и некоторого ε, $0 < \varepsilon < \beta$.

Рассмотрим интегралы

$$I_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} Y_1(t - \tau) \{ F(v_1(\tau), \delta) - F(v_2(\tau), \delta) \} d\tau$$

и

$$I_2(t) = \int\limits_{t}^{+\infty} Y_2(t - \tau) \{ F(v_1(\tau), \delta) - F(v_2(\tau), \delta) \} d\tau$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — некоторые n-мерные векторы.

Лемма. *Пусть для* $t \leqslant T_1$ $\| v_i(t) \| \geqslant R$ $(i = 1, 2)$, *а для* $t \geqslant T_1$ $\| v_1(t) - v_2(t) \| \leqslant d e^{-\gamma t} + \dfrac{M}{\gamma}$, *где* $-\gamma > -\alpha$. *Тогда* $I_1(t)$ *и* $I_2(t)$ *существуют и*

$$\| I_1(t) \| \leqslant \frac{bdL}{\alpha - \gamma} e^{-\gamma t} + \frac{M(L + \gamma)}{\alpha \gamma} e^{-\alpha (t - T_1)}, \quad \| I_2(t) \| \leqslant \frac{bdL}{\beta + \gamma} e^{-\gamma t} + \frac{M(L + \nu)}{\beta \gamma}.$$

Доказательство. Пусть $t \geqslant T_1$, тогда

$$I_1(t) = \int\limits_{T_1}^{t} Y_1(t - \tau) \{ F(v_1(\tau), \delta) - F(v_2(\tau), \delta) \} d\tau,$$

так как для $t \leqslant T_1$ $\| v_i(t) \| \geqslant R$ и $F(v_i(t), \delta) = 0$ $(i = 1, 2)$. Таким образом, $I_1(t)$ — собственный интеграл и, следовательно, существует. Из (6) и условия леммы следует

$$\| I_1(t) \| \leqslant bdL e^{-\alpha t} \int\limits_{T_1}^{t} e^{(\alpha - \gamma)\tau} d\tau + \frac{M(L + \gamma)}{\gamma} \int\limits_{T_1}^{t} e^{-\alpha (t - \tau)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{bdL}{\alpha - \gamma} e^{-\gamma t} + \frac{M(L + \gamma)}{\alpha \gamma} e^{-\alpha (t - T_1)}. \tag{8}$$

При $t < T_1$ $I_i(t) = 0$ и, следовательно, оценка (8) верна для любого t.

Условия леммы и соотношение (6) дают:

$$\| Y_2(t - \tau) \{ F(v_1(\tau), \delta) - F(v_2(\tau), \delta) \} \| \leqslant bdL e^{\beta t} e^{-(\beta + \tau)\tau} + \frac{M(L + \gamma)}{\gamma} e^{\beta (t - \tau)} \tag{9}$$

при $t-\tau \leqslant 0$. Отсюда следует, что $I_2(t)$ сходится. При $t \geqslant T_1$ из (9) получим

$$\|I_2(t)\| \leqslant bdLe^{\beta t}\int_t^{+\infty} e^{-(\beta+\gamma)\tau}d\tau + \frac{M(L+\gamma)}{\gamma\beta} = \frac{bdL}{\gamma+\beta}e^{-\gamma t} + \frac{M(L+\gamma)}{\gamma\beta}.$$

Если $t < T_1$, то

$$I_2(t) = \int_{T_1}^{\infty} Y_2(t-\tau)\{F(v_1(\tau), \delta) - F(\nu_2(\tau), \delta)\}\, d\tau$$

и

$$\|I_2(t)\| \leqslant bdLe^{\beta t}\int_{T_1}^{+\infty} e^{-(\beta+\gamma)\tau}d\tau + \frac{M(L+\gamma)}{\gamma\beta} \leqslant bdL\int_t^{+\infty} e^{-(\beta+\gamma)\tau}d\tau + \frac{M(L+\gamma)}{\gamma\beta}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения леммы.

Рассмотрим интегралы

$$I_1(t, \delta, x) = \int_{-\infty}^{t} Y_1(t-\tau)\, F(x(\tau, x, \delta), \delta)\, d\tau$$

и

$$I_2(t, \delta, x) = \int_t^{+\infty} Y_2(t-\tau)\, F(x(\tau, x, \delta), \delta)\, d\tau.$$

В силу леммы интегралы $I_1(t, \delta, x)$ и $I_2(t, \delta, x)$ существуют при всех $\delta > 0$.

Пусть $\delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ такая последовательность, что $x(t, x) = \lim\limits_{n\to\infty} x(t, x, \delta_n)$. В силу построения функции $F(x, \delta)$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} F(x, \delta_n) = F(x), \tag{10}$$

где $F(x)$ — некоторая измеримая функция, совпадающая почти всюду на G_1 с функцией $f(x)$ (в выражении (10) имеется в виду поточечная сходимость).

Имеем

$$\|I_1(t, \delta_n, x) - I_1(t, \delta_{n+k}, x)\| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \|Y_1(t-\tau)\{F(x(\tau, x, \delta_n), \delta_n) -$$

$$- F(x(\tau, x, \delta_{n+k}), \delta_n)\}\|\, d\tau + \int_t^{+\infty} \|Y_2(t-\tau)\{F(x(\tau, x, \delta_{n+k}), \delta_n) -$$

$$- F(x(\tau, x, \delta_{n+k}), \delta_{n+k})\}\|\, d\tau \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу сходимости последовательностей $\{x(t, x, \delta_n)\}$ и $\{F(x, \delta_n)\}$. Аналогичные выкладки можно проделать и для $I_2(t, \delta_n, x)$. Таким образом, интегралы $I_k(t, \delta, x)$ сходятся при $\delta \to 0$ $(k = 1, 2)$.

Функция $F(x, \delta)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 при всех $\delta > 0$, и, следовательно, существует гомеоморфизм $\Phi(x, \delta) = x - I_1(0, \delta, x) + I_2(0, \delta, x)$, отображающий траектории системы (3), лежащие в области G_1, в траектории системы (2), лежащие в области G_2. В силу изложенного выше предел гомеоморфизма $\Phi(x, \delta)$ при $\delta \to 0$ существует и является непрерывным взаимно однозначным отображением $\Phi(x)$, которое и является искомым гомеоморфизмом, отображающим траектории системы (1), лежащие в области G_1, в соответствующие траектории системы (2). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Гробман, Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве, Матем. сб., т. 56(98), вып. 1, 1962.
2. В. С. Тонкова, Е. Л. Тонков, Некоторые свойства усредненных решений систем регулирования с разрывной правой частью, Дифференц. уравнения, т. 9. № 2, 1973.
3. А. Ф. Филиппов, Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Матем. сб., т. 51(93), вып. 1, 1960.
4. Н. В. Азбелев, Р. К. Рагимханов, Л. Н. Фадеева, Интегральные уравнения с разрывным оператором, Дифференц. уравнения, т. 5, № 5, 1969.
5. Д. М. Гробман, Показатели и минус-показатели систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб., т. 46(88), вып. 3, 1958.

Поступила 26.XI 1973 г.

Институт математики АН УССР