УДК 519.21

Об одном критерии компактности в пространстве операторов Гильберта—Шмидта

Г. П. Буцан

Пусть H_X — гильбертово пространство линейных операторов Гильберта—Шмидта со скалярным произведением $\langle AB \rangle = \mathrm{Sp}\, AB^*$, определенных над сепарабельным гильбертовым пространством X; T_c — множество всех симметричных неотрицательных, вполне непрерывных операторов; S — множество всех ядерных операторов; S_a — подмножество S, состоящее из операторов, след которых не превосходит a над X. Любой ограниченный линейный оператор B над X можно рассматривать как линейный трансформатор [1—3] над H_X по умножению (для определенности слева), т. е.

$$\forall Y \in H_X; \qquad B: Y \to BY \in H_X.$$

В [4, стр. 446, лемма 3] доказывалось:

1. *Если* $B \in T_c$, $A_\mu \in T_c$ *и* $A_\mu^2 \in S_1$, *то множество операторов* $\{BA_\mu\}$ *компактно в* H_X.

2. *Для всякого компактного в* H_X *множества операторов* C_μ *найдется такой оператор* $B \in T_c$, *что* $B^{-1}C_\mu^2 B^{-1} \in S_1$.

На то, что первая часть приведенной леммы не верна, указывает следующий пример.

Пусть $\{e_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, — собственный базис оператора B, рассмотрим операторы K_{ij} над $X: K_{ij} \begin{cases} e_i \to e_j, \\ e_n \to 0, \ n \neq i. \end{cases}$

Известно [5], что $\{K_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, \infty}$, образуют ортонормированный базис в H_X.

Рассмотрим операторы $A_{ij} = \dfrac{K_{ij} + K_{ji}}{\sqrt{2}}$.

Очевидно, $A_{ij} \in T_c$ и $A_{ij}^2 \in S_1$. Покажем, что операторы $\{BA_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, \infty}$, не образуют компактное множество в H_X. Действительно,

$$BA_{ij} = \frac{\lambda_j K_{ij} + \lambda_i K_{ji}}{\sqrt{2}},$$

и легко видеть, что, если они отличаются хотя бы одним индексом, то они ортогональны в H_X. Далее легко видеть, что квадрат абсолютной нормы BA_{ij} равен $\dfrac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{2}$. Отсюда следует, что, например, последовательность $\{BA_{1j}\}$, $j = \overline{1, \infty}$, не будет содержать сходящейся подпоследовательности, что и требовалось.

Однако вопрос, поставленный леммой 3 [4], как первой, так и второй ее частью, полностью решает следующая лемма.

Лемма. 1. *Если* $A, B \in T_c$, *то* $A \otimes B$ — *неотрицательный, симметричный, вполне непрерывный трансформатор над* H_X, *т. е.* $A \otimes B(S_1) = A(S_1)B^*$ — *компакт, где* $A \otimes B$ *обозначает тензорное произведение операторов* A *и* B *и* $\forall Y \in H_X$; $A \otimes B: Y \to AYB^* \in H_X$.

2. *Для любого компакта* $K \subset H_X$ *существует такой трансформатор* $\mathfrak{B} = B \otimes B$ *над* H_X, $B \in T_c$, *что* $K \subset \{Y : \| \mathfrak{B}^{-1} Y \|_{H_X} \leqslant 1\}$.

Доказательство. 1. Требуется доказать лишь третье утверждение (см. [2]), а оно просто следует из того факта, что разложение единицы трансформатора $A \otimes B$ есть тензорное произведение разложений единицы операторов A и B.

2. Пусть $\{e_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, — произвольный базис в X, рассмотрим операторы K_{ij} над H_X, аналогичные приведенным выше. Пусть $Y^{ij} = \langle Y, K_{ij} \rangle$. Из компактности K вытекает, что существует такая последовательность $c_p \downarrow 0$, что

$$\forall Y \in K: \sum_{i \geqslant n,\ j \geqslant m} (Y^{ij})^2 \leqslant c_n \cdot c_m = c_{nm}.$$

Выберем теперь числа $d_n \downarrow 0$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n c_n < \infty,$$

тогда

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} d_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} d_i d_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i\right)^2 = \infty$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} d_{ij} c_{ij} = \sum_{i,j=1}^{\infty} d_i d_j c_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i c_i\right)^2 < \infty.$$

Имеем

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (Y^{ij})^2 \sum_{p \leqslant i,\ q \leqslant j} d_{pq} = \sum_{i,j=1}^{\infty} d_{ij} \sum_{p \geqslant i,\ q \geqslant j} (Y^{pq})^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} d_{ij} c_{ij} < \infty.$$

Рассмотрим теперь оператор B, для которого $\{e_k\}$ являются собствен ными векторами и

$$Be_k = \left(\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\infty} d_j c_j}{\sum_{j=1}^{k} d_j}}\right) e_k.$$

Очевидно, $B \in T_c$, так как

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_j c_j \left(\sum_{j=1}^{k} d_j\right)^{-1} = 0.$$

Теперь рассмотрим трансформатор $\mathfrak{B} = B \otimes B$. Легко видеть что

$$\mathfrak{B} K_{ij} = \left(\sqrt{\frac{\left(\sum_{p=1}^{\infty} d_p c_p\right)^2}{\left(\sum_{p=1}^{i} d_p\right)\left(\sum_{q=1}^{j} d_q\right)}}\right) K_{ij} =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\sum_{p,q=1}^{\infty} d_p c_p d_q c_q}{\sum_{p \leqslant i,\ q \leqslant j} d_p d_q}}\right) K_{ij} = \left(\sqrt{\frac{\sum_{p,q=1}^{\infty} d_{pq} c_{pq}}{\sum_{p \leqslant i,\ q \leqslant j} d_{pq}}}\right) K_{ij}.$$

Далее

$$\forall Y \in K : \| \mathfrak{B}^{-1} Y \|_{H_X}^2 = \left\| \mathfrak{B}^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} Y^{ij} K_{ij} \right) \right\|_{H_X}^2 =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} (Y^{ij})^2 \frac{\sum_{p \leqslant i,\ q \leqslant j} d_{pq}}{\sum_{p,q=1}^{\infty} d_{pq} c_{pq}} \leqslant 1,$$

а то, что $\mathfrak{B}$ — вполне непрерывный, положительный симметричный транс форматор, вытекает из [1] и из соотношения

$$\frac{\sum\limits_{p,q=1}^{\infty} d_{pq} c_{pq}}{\sum\limits_{p\leqslant i,\ q\leqslant j} d_{pq}} \to 0,\ i, j \to \infty.$$

На основании леммы 3 в [4, стр. 448] доказывалась теорема 2.

Пусть $M = \{\mu\}$ — *семейство конечных мер на* $\mathfrak{A}$ (*борелевская* σ-*алгебра в* X). *Для слабой компактности множества* M *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0,\ \forall \mu \in M : \mu \{x : x \in X,\ |x| > c\} < \varepsilon$;

2) $\forall c > 0$ *семейство операторов* $\{B_\mu^c\}$, *определяемых соотношениями*:

$$\int\limits_{|x|\leqslant c} (z, x)^2 \mu (dx) = |B_\mu^c z|^2,$$

являлось компактным множеством в H_X.

Условие 2) можно заменить следующим:

2′) *в каком-либо базисе* (*а значит, и в любом базисе*) *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |B_\mu^c e_k|^2$ *сходится равномерно по* μ *при всяком* $c > 0$.

Доказательство условия 2) приведенной теоремы строилось на основании леммы 3 [4, стр. 446] и поэтому не верно. Можно показать, опираясь на приведенную выше лемму, что теорема 2 из [4] верна в следующей формулировке.

Пусть $M = \{\mu\}$ — *семейство конечных мер на* $\mathfrak{A}$. *Для слабой компактности множества* M *необходимо и достаточно, чтобы*:

1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0,\ \forall \mu \in M : \mu \{x : x \in X,\ |x| > c\} < \varepsilon$;

2) $\forall c > 0$ *семейство операторов* $\{B_\mu^c\}$, *определяемых соотношениями*:

$$\int\limits_{|x|< c} (z, x)^2 \mu (dx) = |B_\mu^c z|^2,$$

было представимо в виде: $B_\mu^c = B^c A_\mu^c$, *где* $B^c \in T_c,\ A_\mu^c (A_\mu^c)^* \in S_1$.

Условие 2) можно заменить условием 2′).

Подобным образом нужно изменить формулировки теоремы 3 и соответствующих следствий 1 и 2 из [4, стр. 450].

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. В. Скорохода за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1967.
2. Г. П. Буцан, Одно условие эквивалентности гауссовских мер в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. 25, № 4, 1973.
3. Г. П. Буцан, Одно условие эквивалентности меры, заданной в подгруппе относительно сдвига, УМЖ, т. 26, № 1, 1974.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 1, «Наука», М., 1971.
5. Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представленных групп, «Наука», М., 1965.

Поступила 14.I 1973 г.

Институт математики АН УССР