УДК 517.946.9

# Решение внутренних задач электродинамики проводящих сред проекционными методами

*Т. А. Плотницкий*

1. Обозначения. Рассмотрим в 3-мерном евклидовом пространстве ограниченную область $\Omega$, а также цилиндрическую область $Q=\Omega\times\times\,]0, T[$ ($T$ конечно).

Границу $S$ области $\Omega$ будем считать «достаточно регулярной» так, что, в частности, определены на $S$ нормальная и тангенциальная составляющие $u_n$ и $u_\tau$ 3-вектора $u$.

Через $P^m$ будем обозначать проектор некоторого банахова пространства $V$ на его конечномерное подпространство с базисом $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$. Если базис

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ полный в подпространстве соленоидальных векторов пространства $V$, то положим [1 — 3]

$$\forall h \in V, \qquad h = P^{\sigma}h + \operatorname{grad}\psi; \qquad \operatorname{div} P^{\sigma}h \equiv 0. \tag{1}$$

**2. Постановка задачи.** Ищется пара функций $H$ и $E$, определенных в $Q$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(|H|^{\gamma-2}H) - \operatorname{rot} E = 0, \qquad (\gamma > 1) \text{ в } Q, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} H + |E|^{\varepsilon-2}E = f, \qquad (\varepsilon > 1) \text{ в } Q \tag{3}$$

и начально-краевым условиям:

$$E_{\tau} = 0 \text{ на } S \times ]0, T[, \tag{4}$$

$$H = H_0 \text{ в } \Omega. \tag{5}$$

**3. Априорные оценки.** Умножив в $L_2(\Omega)$ (2) и (3) на вектор $\{H, E\}$, получим

$$\frac{1}{\gamma'}\frac{\partial}{\partial t}\|H\|^{\gamma}_{L_{\gamma}(\Omega)} + \|E\|^{\varepsilon}_{L_{\varepsilon}(\Omega)} = (f, E)_{L_2(\Omega)} \quad \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1\right), \tag{*}$$

откуда следует, что apriori

$$H \text{ ограничено в } L_{\infty}(0, T; L_{\gamma}(\Omega)), \tag{6}$$

$$E \text{ ограничено в } L_{\varepsilon}(Q), \tag{7}$$

если предположить, что

$$f \in L_{\varepsilon'}(Q), \qquad H_0 \in L_{\gamma}(\Omega). \tag{8}$$

Опять-таки формально, из (2), (3), (6) — (8) вытекает, что

$$\operatorname{rot} H \text{ ограничено в } L_{\varepsilon'}(Q), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|H|^{\gamma-2}H) \text{ ограничено в } L_{\varepsilon}(0, T; W_{\varepsilon}^{-1}(\Omega)). \tag{10}$$

**4. Приближенные решения.** Пусть гладкие функции $\{h_i\}$ и $\{e_i\}$ образуют базис в $L_{\gamma}(\Omega)$ и $L_{\varepsilon}(\Omega)$ соответственно, причем

$$\text{если } \operatorname{div} h_i \neq 0, \text{ то } h_i = \operatorname{grad}\varphi_i, \tag{11}$$

$$\operatorname{rot} h_m \in \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \qquad e_{i\tau} = 0 \text{ на } S. \tag{12}$$

Такой выбор возможен, если, например, $h_i \in W_2^2(\Omega)$ [1 — 3].

Будем искать «приближенное решение» $\{H_m, E_m\}$ задачи (2) — (5) в виде

$$H_m = \sum_{k=1}^{m} x_{km}h_k, \qquad E_m = \sum_{k=1}^{m} y_{km}e_k, \tag{13}$$

где $x_{km} = x_{km}(t)$, $y_{km} = y_{km}(t)$ определяются из условий

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(|H_m|^{\gamma-2}H_m) - \operatorname{rot} E_m, h_k\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{14}$$

$$(\operatorname{rot} H_m + |E_m|^{\varepsilon-2}E_m - f, e_k)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{15}$$

$$H_m(0) = P^m H_0 = H_{0m}. \tag{16}$$

Если умножить (14), (15) на вектор $\{x_{km}, y_{km}\}$, просуммировать по $k$ от 1 до $m$, то получим для $H_m$ и $E_m$ соотношение (*): следовательно, в предположении (8) будем иметь $\forall m$

$$H_m \text{ ограничено в } L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega)), \tag{17}$$

$$E_m \text{ ограничено в } L_\varepsilon(Q), \tag{18}$$

$$\operatorname{rot} H_m = \operatorname{rot} P^\sigma H_m \text{ ограничено в } L_{\varepsilon'}(Q), \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P^m (|H_m|^{\gamma-2} H_m) \text{ ограничено в } L_\varepsilon(0, T; W_\varepsilon^{-1}(\Omega)). \tag{20}$$

Наконец, в силу (11) из (14) вытекает, что

$$(|H_m|^{\gamma-2} H_m - |H_{0m}|^{\gamma-2} H_{0m}, P^m \operatorname{grad} \psi)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{21}$$

В дальнейшем будем считать, что $|H_{0m}|^{\gamma-2} H_{0m} = P^\sigma |H_{0m}|^{\gamma-2} H_{0m}$.

5. Применение оценок. Из (17) и (19) следует, что из $\{H_m\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{H_\mu\}$, что [4, 5]

$$H_\mu(t_i) = H_{\mu i} \to H_i \text{ слабо в } L_\gamma(\Omega) \quad \forall t_i \in \{t_1, t_2, \ldots\}, \tag{22}$$

$$\operatorname{rot} P^\sigma H_{\mu i} \text{ ограничено в } L_{\varepsilon'}(\Omega) \quad \forall t_i \in \{t_1, t_2, \ldots\}, \tag{23}$$

где $\{t_1, t_2, \ldots\}$ — любое счетное, всюду плотное в $[0, T]$ множество, не содержащее точек некоторого множества нулевой меры $Z \in [0, T]$.

Лемма 1. *Последовательность $P^\sigma H_{\mu i} \to P^\sigma H_i$ почти всюду в $\Omega$.*

Согласно [1] доказательство вытекает из сходимости почти всюду последовательности объемных потенциалов

$$\operatorname{rot} \int_\Omega \frac{\operatorname{rot} H_{\mu i}}{|r|} d\Omega = H_{\mu i}^1, \tag{24}$$

поскольку $H_{\mu i} - H_{\mu i}^1$ потенциальный (гармонический) [6, 7].

Замечание 1. Последовательность $P^\sigma H_{\mu i} \to P^\sigma H_i$ сильно в $L_{\frac{3\varepsilon'}{3-\varepsilon'}}(\Omega)$, если $\varepsilon' \leqslant 3$; при $\varepsilon' > 3$ сходимость имеет место в классах Гельдера с показателем $h < 1 - \frac{3}{\varepsilon'}$.

Лемма 2. *Отображение $H_{\mu i} \to |H_{\mu i}|^{\gamma-2} H_{\mu i}$ $\forall i$ слабо непрерывно.*

Доказательство. Полагая $|H_{\mu i}|^{\gamma-2} H_{\mu i} \to \varkappa_i$ слабо в $L_{\gamma'}(\Omega)$, получим в силу (1), (11), (21) и леммы 1 $\forall h \in L_\gamma(\Omega)$

$$(|H_{\mu i}|^{\gamma-2} H_{\mu i} - |h|^{\gamma-2} h, H_{\mu i} - h)_{L_2(\Omega)} \to (\varkappa_i - |h|^{\gamma-2} h, H_i - h)_{L_2(\Omega)} \geqslant 0, \tag{25}$$

откуда можно получить утверждение леммы, используя монотонность отображения $\varphi \to |\varphi|^{\gamma-2} \varphi = A^\gamma(\varphi)$ [5, 8].

Лемма 3.

$$|H_\mu|^{\gamma-2} H_\mu \to |H|^{\gamma-2} H \; * \text{ слабо в } L_\infty(0, T; L_{\gamma'}(\Omega)). \tag{26}$$

Доказательство. Полагая $\forall t \in [0; T]$ (см. [5, 9])

$$P^\mu A^\gamma(H_\mu(t)) = P^\mu A^\gamma(H_\mu(t_l)) + \int_{t_l}^{t} \frac{\partial}{\partial t} P^m A^\gamma(H(\theta))\, d\theta,$$

из того, что

$$\left\| \int_{t_i}^{t} \frac{\partial}{\partial t} P^\mu A^\gamma (H(\theta))\, d\theta \right\|_{W_\varepsilon^{-1}(\Omega)} \leqslant | t_i - t |^{\frac{1}{\varepsilon'}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} P^\mu A^\gamma (H) \right\|_{L_\varepsilon(0,T;W_\varepsilon^{-1}(\Omega))},$$

имеем слабую фундаментальность $P^\mu A^\gamma(H)$ в $W_\varepsilon^{-1}(\Omega)$ $\forall t \in [0, T]$. Но, поскольку $\{t_1, t_2, \ldots\}$ произвольно в $[0, T] \setminus Z$, на некоторой подпоследовательности $H_\rho(t)$ оператор $A^\gamma$ слабо непрерывен в $L_{\gamma'}(\Omega)$, откуда следует утверждение леммы.

6. Теорема существования. Переходя к пределу в (14), (15) при $m = \mu$ и фиксированном $k$, получим в силу (26) равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}(|H|^{\gamma-2} H) - \operatorname{rot} E = 0, \qquad H \in L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega)), \tag{27}$$

$$\operatorname{rot} H + \varkappa = f \qquad \varkappa \in L_{\varepsilon'}(Q), \qquad E \in L_\varepsilon(Q). \tag{28}$$

Лемма 4. *Из* (27), (28) $\forall t \in [0, T]$ *вытекает неравенство*

$$(f, E)_{L_2(Q)} + \frac{1}{\gamma'} \| H_0 \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} - \| H(T) \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant (\varkappa, E)_{L_2(Q)}. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть множество $[0, T] \setminus Z$ $(\operatorname{mes} Z = 0)$ такое, что $\forall i, j$ имеют смысл равенства

$$|H_i|^{\gamma-2} H_i - |H_j|^{\gamma-2} H_j - \operatorname{rot} \int_{t_j}^{t_i} E d\theta = 0, \tag{30}$$

$$\operatorname{rot} H_j + \varkappa_j = f_j, \tag{31}$$

где индексом $i$ обозначены значения функции в $t_i \in \{t_1, t_2, \ldots\}$ и, например, $f_i$ — ступенчатая функция, равная $f(t_i)$ на $[t_i, t_{i+1}]$. Умножая (30), (31) на $\left\{ H_j, \int_{t_j}^{t_i} E d\theta \right\}$, получим

$$\frac{1}{\gamma'}(\| H_i \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} - \| H_j \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)}) = \left( f_j - \varkappa_j, \int_{t_j}^{t_i} E d\theta \right)_{L_2(\Omega)}. \tag{32}$$

Складывая (32) по $i$ от $i$ до $j$, можно перейти в результате к верхним пределам при $| t_i - t_{i+1} | \to 0$ $\forall i < j$. Замечая, что, например, $\varkappa_j \to \varkappa$ сильно в $L_{\varepsilon'}(Q)$ и норма в $L_\gamma(\Omega)$ полунепрерывна снизу, будем иметь [8]

$$\frac{1}{\gamma'}(\| H_i \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} - \| H_j \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)}) \geqslant (f - \varkappa, E)_{L_2(t_i, t_j; L_2(\Omega))}, \tag{33}$$

что приводит к (29) переходом к верхним пределам при $t_j \to 0$, $t_i \to T$, поскольку множество $|H_\mu|^{\gamma-2} H_\mu$ равностепенно непрерывно по $t$ со значениями в $W_\varepsilon^{-1}(\Omega)$ [10].

Теорема 1. *При условии* (8) *существует по крайней мере одна пара функций* $\{H; E\}$, *удовлетворяющая* (2) — (5).

Доказательство. Согласно (*) для $\{H_\mu; E_\mu\}$ имеем

$$\limsup (|E_\mu|^{\varepsilon-2} E_\mu, E_\mu)_{L_2(Q)} \leqslant (f, E)_{L_2(Q)} + \frac{1}{\gamma'} \| H_0 \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} - \frac{1}{\gamma'} \| H(T) \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)},$$

что вместе с (29) дает

$$\limsup \,(|E_\mu|^{\varepsilon-2} E_\mu, E_\mu)_{L_2(Q)} \leqslant (\varkappa, E)_{L_2(Q)}, \tag{34}$$

и для доказательства теоремы достаточно повторить рассуждения леммы 2 [11].

Замечание 2. Если $\gamma = 2$, то, очевидно, имеет место теорема единственности решения задачи (2) — (5). Если $\varepsilon = 2$, то, вводя новую переменную $E = \int_0^t E d\theta$, можно свести задачу (2) — (5) к задаче с линейной эволюцией. Таким образом, можно говорить о единственности решения задачи (2) — (5), если в ней только один оператор нелинейный.

7. Периодические решения. Пусть $\psi$ — достаточно гладкая функция переменной $t$. Тогда справедливое для $\{H_m; E_m\}$ соотношение (*) дает

$$\frac{1}{\gamma'}\frac{\partial}{\partial t}(\psi \| H_m \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)}) + \psi \| E_m \|^\varepsilon_{L_\varepsilon(\Omega)} = \psi (f, E_m)_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\gamma'}\psi' \| H_m \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)},$$

откуда следует, что ($C$ обозначают различные положительные константы)

$$\psi(T) \| H_m(T) \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} + C_1 \| \psi E_m \|^\varepsilon_{L_\varepsilon(Q)} \leqslant C_2 \| f \|^{\varepsilon'}_{L_{\varepsilon'}(Q)} + \max \frac{d\psi}{dt} \| H_m \|^\gamma_{L_\gamma(Q)} + $$
$$+ \psi(0) \| H(0) \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)}.$$

Если найдется последовательность $\{H_\mu; E_\mu\}$ такая, что $\forall_\mu$

$$C_1 \| E_\mu \|^\varepsilon_{L_\varepsilon(Q)} \geqslant C_2 \| f \|^{\varepsilon'}_{L_{\varepsilon'}(Q)},$$

то при $\psi = 1$ конечномерное отображение $H_m(0) \to H_m(T)$ переводит шар в $\{h_1, e_1, h_2, e_2, \ldots, h_m, e_m\}$ любого радиуса в себя и, таким образом, имеет неподвижную точку в этом шаре $\forall_\mu$; поэтому для $\{H_\mu; E_\mu\}$ справедливы все рассуждения пп. 3 — 6. Следовательно, в этом случае имеет место теорема существования решения задачи (2) — (5), в которой (5) заменяется условием периодичности

$$u(0) = u(T). \tag{35}$$

Однако, если

$$\| E_\mu \|_{L_\varepsilon(Q)} \leqslant C_3 \tag{36}$$

и $C_3$ не зависит от $H_0$, то при $\psi = \frac{t}{T}$ из (34) вытекает неравенство

$$\| H_\mu \|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant C_2 \| f \|^{\varepsilon'}_{L_{\varepsilon'}(Q)} + \frac{1}{T} \| H \|^\gamma_{L_\gamma(Q)},$$

откуда и будет следовать существование периодического решения, если показать, что $H_\mu$ не оценивается в $L_\gamma(Q)$ функцией $H_\mu(0)$.

8. Дополнительная априорная оценка. Из (36), (12) и (15) следует, что

$$\| \operatorname{rot} P^\sigma H_\mu \|_{L_{\varepsilon'}(Q)} \leqslant C_4 \ (C_4 \text{ не зависит от } H_0), \tag{37}$$

откуда в силу замечания 1 получим

$$\| PH_\mu \|_{L^{\varepsilon'}\left(0,T; L_{\frac{3\varepsilon'}{3-\varepsilon'}}(\Omega)\right)} \leqslant \| P^\circ H_\mu \|_{L_\gamma(Q)}, \quad \text{если } \gamma < \varepsilon'. \tag{38}$$

Но из (21) следует, что

$$\| H_\mu \|^{\gamma}_{L_\gamma(Q)} = (| H_\mu |^{\gamma-2} H_\mu, P^\sigma H_\mu)_{L_2(Q)} \leqslant \| H_\mu \|^{\gamma-1}_{L_\gamma(Q)} \| P^\sigma H_\mu \|_{L_\gamma(Q)},$$

откуда вытекает (37) и следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задана функция*

$$f \in L_{\varepsilon'}(Q) \text{ и } \varepsilon' \geqslant \gamma.$$

*Тогда существует функция*

$$H \in C(0, T; L_\gamma(\Omega)), \; E \in L_\varepsilon(Q), \tag{39}$$

*удовлетворяющая* (2)—(4) *и* (35).

Замечание 3. Уравнения (2), (3) выбраны здесь в качестве «модельных уравнений» с целью выявить основное без посторонних технических осложнений. На самом деле, использованы лишь монотонность, семинепрерывность и коэрцитивность нелинейных операторов, а также потенциальность оператора $|H|^{\gamma-2} H$; следовательно, полученные результаты распространяются на гораздо более общие уравнения (см. [4]).

Замечание 4. С помощью семидискретизации по времени можно «приближать» задачу (2)—(5) или (2)—(4), (35) уравнением с монотонным оператором [11] и совершенно аналогичными рассуждениями получить заново результаты данной работы. В частности, этим методом можно решать систему (14)—(16).

Замечание 5. Если

$$f \in W^1_{\varepsilon'}(0, T; L_{\varepsilon'}(\Omega)), \; H_0 \in L_\gamma(\Omega) \cap W^1_{\varepsilon'}(\Omega),$$

то для задачи (2) — (5)

$$H \in C(0, T; W^1_{\varepsilon'}(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t}(| H |^{\frac{\gamma-2}{2}} H) \in L_2(Q), \quad E \in L_\infty(0, T; L_\varepsilon(Q)).$$

Этот факт будет иметь место и для задачи (2) — (4), (35), если $\gamma \leqslant \dfrac{3\varepsilon'}{3-\varepsilon'}$ ($\gamma$ — конечно и произвольно при $\varepsilon' > 3$).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Э. Б. Быховский, Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы, Вестник ЛГУ, № 13, 1957.
2. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа, Труды Математического ин-та АН СССР, т. 59, 1960.
3. H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J., N 7, 1940.
4. Ю. А. Дубинский, Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка, УМН, т. 23, вып. 1, 1968.
5. Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, «Мир», М., 1972.
6. О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», М., 1970.
7. P. A. Raviart, Sur la resolutions de certeines equations paraboliques non linearies, J., Func. Anal., v. 5, N 2, 1970.
8. М. М. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, «Наука», М., 1972.
9. Ю. А. Дубинский, Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Матем. сб., т. 67 (109), № 4, 1965.
10. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971.
11. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.



Поступила 12.III 1974 г.


Институт математики АН УССР