УДК 534.113:539.3

О двухволновом представлении решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой

О. А. Горошко, А. Г. Демьяненко

Многие задачи динамики конструкций, несущих подвижную инерциальную нагрузку, сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих смешанную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, и к их решению нельзя применить классическую схему разделения переменных в действительной области искомых функций. Для исследования этого класса задач обычно применяют приближенные или качественные методы [1]. Большинство таких задач исследуется методом Бубнова—Галеркина, идея которого заключается в разложении решения по функциям, которые представляют собой формы собственных колебаний соответствующей системы при неподвижной нагрузке. В действительности же формы колебаний систем с подвижной нагрузкой не совпадают с формами собственных колебаний систем при неподвижной нагрузке, чем и допускаются значительные погрешности. Как показано в работах [2, 3], приближенные решения задач динамики конструкций с подвижной нагрузкой, построенные по традиционным схемам, в частности, решения, полученные по методу Галеркина, не позволяют вскрыть все качественные особенности движения таких систем и являются неполными.

В данной работе приводятся точные аналитические решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику некоторых конструкций с подвижной нагрузкой, полученные применением метода, развитого в работах [4, 5]. Согласно этому методу решения уравнений отыскиваются в виде специального двучленного представления, позволяющего разделить переменные. При этом необходимо отметить, что на параметры систем не накладываются никакие ограничения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + du = 0. \qquad (1)$$

К интегрированию уравнения (1) сводятся задачи о поперечных колебаниях балки, лежащей на упругом основании, задача об осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки, находящихся под воздействием равномерно распределенной, движущейся с постоянной скоростью нагрузки, а также некоторые задачи об изгибных колебаниях трубопроводов с протекающей жидкостью. Например, задача об осесимметричных радиальных колебаниях цилиндрической оболочки с погонным весом m, вдоль которой со скоростью v движется равномерно распределенная нагрузка интенсивности m_1 в виде бесконечной трубы, сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2v\beta}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{v^2\beta}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}u = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\beta = \frac{m_1}{m+m_1}$, $c^2 = \frac{Dg}{m+m_1}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки, h — ее толщина.

Перейдем к построению решения уравнения (1), которое представим в виде двух слагаемых

$$u(x, t) = \varphi(x)\cos\omega t + \psi(x)\sin\omega t. \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим два взаимно связанных уравнения для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\begin{aligned} &\varphi^{\mathrm{IV}}(x) + c\varphi''(x) + 2b\omega\psi'(x) + (d - a\omega^2)\varphi(x) = 0,\\ &\psi^{\mathrm{IV}}(x) + c\psi''(x) - 2b\omega\varphi'(x) + (d - a\omega^2)\psi(x) = 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

которые необходимо решить при определенных граничных условиях. Вводя комплексную функцию действительных переменных

$$\Phi(x) = \varphi(x) + i\psi(x), \qquad (5)$$

решение системы (4) сведется к решению уравнения

$$\Phi^{\mathrm{IV}}(x) + c\Phi''(x) - 2ib\omega\Phi'(x) + (d - a\omega^2)\Phi(x) = 0 \qquad (6)$$

После нахождения $\Phi(x)$ из (6) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определятся по формулам

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}[\Phi(x)], \qquad \psi(x) = \operatorname{Im}[\Phi(x)].$$

Для решения (6) необходимо отыскать корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (6)

$$k^4 + ck^2 - 2ib\omega k + (d - a\omega^2) = 0. \qquad (7)$$

Корни алгебраического уравнения (7) в общем виде можно записать [6]

$$k_{1,2} = \frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - y + \frac{2ib\omega}{A}}; \quad k_{3,4} = -\frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - y - \frac{2ib\omega}{A}},$$

где

$$A = 2\sqrt{2y - c}, \qquad (9)$$

а y — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$y^3 - \frac{c}{2}y^2 - (d - a\omega^2)y + \frac{dc}{2} + \frac{\omega^2}{2}(b^2 - ac) = 0. \tag{10}$$

Значение действительного корня (10) в зависимости от знака выражения

$$Q = \frac{1}{27}\left[a\omega^2 - \frac{c^2}{12} - d\right]^3 + \frac{1}{4}\left[\frac{2dc + \omega^2(3b^2 - 2ac)}{6} - \frac{c^3}{108}\right]^2 \tag{11}$$

можно определить по следующим формулам [6]:

а) при $Q > 0$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} + \frac{c}{6}; \tag{12}$$

б) при $Q = 0$

$$y = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \frac{c}{6}; \tag{13}$$

в) при $Q < 0$

$$y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} + \frac{c}{6}, \tag{14}$$

где

$$\cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad q = \frac{2dc + \omega^2(3b^2 - 2ac)}{6} - \frac{c^3}{108},$$

$$p = a\omega^2 - \frac{c^2}{12} - d.$$

Знак выражения (11) определяется исходя из конкретных соотношений коэффициентов, которые зависят от параметров системы [7]. Учитывая выражения для действительного корня (12)—(14), видно, что выражение (9) может быть действительным и мнимым, но не равным нулю.

1. Пусть A — мнимая величина, тогда (8) можно переписать

$$k_{1,2} = i\alpha \pm \sqrt{\gamma}, \quad k_{3,4} = -i\alpha \pm \sqrt{\delta}, \tag{15}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{c - 2y}, \quad \gamma = \frac{1}{4}(2y - c) - y + \frac{b\omega}{\sqrt{c - 2y}},$$

$$\delta = \frac{1}{4}(2y - c) - y - \frac{b\omega}{\sqrt{c - 2y}}.$$

Здесь возможны следующие варианты:

а) $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ — действительные величины. При этом решение уравнения (6) запишется

$$\Phi(x) = e^{i\alpha x}[C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\gamma}x + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\gamma}x + e^{-i\alpha x}[C_3 \operatorname{ch}\sqrt{\delta}x + C_4 \operatorname{sh}\sqrt{\delta}x]; \tag{16}$$

б) $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ — мнимые величины. При этом выражения для корней (15) перепишем в виде

$$k_{1,2} = i(\alpha \pm \gamma_1), \quad k_{3,4} = i(-\alpha \pm \delta_1),$$

где $\gamma_1 = \sqrt{-\gamma}$, $\delta_1 = \sqrt{-\delta}$, а решение уравнения (6) будет иметь вид

$$\Phi(x) = e^{i\alpha x}[C_1\cos\gamma_1 x + C_2\sin\gamma_1 x] + e^{-i\alpha x}[C_3\cos\delta_1 x + C_4\sin\delta_1 x]; \tag{17}$$

в) $\sqrt{\delta}$ — мнимая, $\sqrt{\gamma}$ — действительная величины. В этом случае корни запишутся

$$k_{1,2} = i\alpha \pm \sqrt{\gamma}, \quad k_{3,4} = i(-\alpha \pm \delta_1),$$

а решением уравнения (6) будет

$$\Phi(x) = e^{i\alpha x}[C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\gamma} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\gamma} x] + e^{-i\alpha x}[C_3 \cos \delta_1 x + C_4 \sin \delta_1 x]. \quad (18)$$

2. Пусть A — действительная величина. Из (14) и (9) следует, что в этом случае выражение (9) заведомо действительно, а корни (8) имеют вид

$$k_{1,2} = \pm\mu + i\eta, \qquad k_{3,4} = \pm\varkappa - i\eta, \quad (19)$$

где μ, $\varkappa$ и η — действительные и мнимые части в выражениях (8). В соответствии с корнями (19) решение (6) можно записать в виде

$$\Phi(x) = e^{i\eta x}[C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x] + e^{-i\eta x}[C_3 \operatorname{ch} \varkappa x + C_4 \operatorname{sh} \varkappa x]. \quad (20)$$

В решениях (16), (17), (19) C_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ — комплексные постоянные, которые определяются из краевых условий задачи, соответствующих условиям закрепления исследуемой конструкции.

Пусть края конструкции жестко закреплены, тогда

$$u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u'(l, t) = 0, \quad (21)$$

которые для функции $\Phi(x)$ запишутся

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(l) = 0, \quad \Phi'(l) = 0. \quad (22)$$

Имея решения уравнения (6), сумеем удовлетворить краевым условиям только при определенных значениях ω, являющихся собственными числами уравнения (6), которым соответствуют две системы собственных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Значения этих собственных чисел дадут спектр частот свободных колебаний системы. Определив частоты ω_n, являющиеся корнями характеристического определителя, и постоянные C_n из краевых условий конкретной задачи, общее точное решение (1) представится в виде суммы двух рядов

$$u(x, t) = \sum_n a_n \varphi_n(x) \cos(\omega_n t + \alpha_n) + \sum_n a_n \psi_n(x) \sin(\omega_n t + \alpha_n), \quad (23)$$

где постоянные α_n и a_n определяются из начальных условий.

Отделив в решениях уравнения (6) действительную и мнимую части, получим два семейства собственных функций, которые определяют согласно [4, 5] собственные формы колебаний $\varphi_n(x)$, вырождающиеся при неподвижной нагрузке в формы собственных колебаний конструкции с погонной массой, равной сумме погонной массы конструкции и интенсивности подвижной нагрузки, и формы сопровождающих колебаний $\psi_n(x)$, которые обусловлены подвижностью нагрузки и нетривиальны лишь при наличии ее.

Таким образом, из построенного точного решения (23) видно, что колебания конструкций, несущих подвижную нагрузку, осуществляются в виде суперпозиции двух групп стоячих волн, сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$, дифференциальные же уравнения имеют две системы собственных функций, а, следовательно, решения дифференциальных уравнений, описывающих движение конструкций с подвижной нагрузкой, должны строиться в виде двучленного представления, которое качественно более полно отражает характер реакции конструкции на силовое воздействие подвижной нагрузки. Отметим, что в зависимости от коэффициентов уравнения (1), а следовательно, от параметров исследуемой колебательной системы (скорости, соотношения подвижных и неподвижных масс), решение уравнения качественно меняется, а, значит меняются и собственные функции, т. е. формы собственных и сопровождающих колебаний. Подчеркнем, что речь идет об изменении форм колебаний, а не об изменении абсолютных значений прогибов, т. е. амплитуд, которые в свою очередь зависят от параметров системы и изменяются в зависимости от них.

Итак, двухволновое представление решения дифференциального уравнения (1) позволяет получить точное аналитическое решение некоторых задач, более полно отражающее характер движения систем, на основании которого можно исследовать колебательные свойства систем в зависимости от их параметров и утверждать об определяющей особенности двухволнового процесса колебаний конструкций с подвижной нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Мовчан, Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости, ПММ, т. 29, вып. 4, 1965.
2. О. А. Горошко, Л. Д. Титова, Приближенное решение задач о поперечных колебаниях каната при средних скоростях, Сб. Стальные канаты, № 8, «Техника», К., 1971.
3. Л. Д. Титова, Об особенностях применения приближенных методов к решению задач динамики объектов переменной длины и упругих систем с подвижной нагрузкой, Сб. Стальные канаты, № 8, «Техника», К., 1971.
4. О. А. Горошко, Собственные и сопровождающие колебания в системах с подвижными инерционными нагрузками, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 3, Изд. Института математики АН УССР, К., 1970.
5. О. А. Горошко, Г. Н. Савин, Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины, «Наукова думка», К., 1971.
6. А. А. Рывкин, А. З. Рывкин, А. С. Хренов, Справочник по математике, «Высшая школа», М., 1964.
7. О. А. Горошко, А. Г. Демьяненко, С. П. Киба, Исследование влияния интенсивности подвижной нагрузки на свободные колебания стержня, Сб. Нелинейные колебания и устойчивость движения, Изд. Института математики АН УССР, К., 1973

Поступила 16.VII 1973 г.
Днепропетровский сельскохозяйственный институт