УДК 513.88+517.944/.947

# Обобщение метода разделения переменных

*П. И. Каленюк*

В работе [1] установлены необходимые и достаточные условия разделения переменных для одного однородного функционального уравнения и с помощью этого результата определен общий вид решений уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, представимых в виде $u = u(\varphi)$, $\varphi = X(x) + Y(y)$ ($u(\varphi)$, $X(x)$, $Y(y)$ — действительные функции). Автор указывает также на возможность использования этих условий для разделения переменных для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, коэффициенты которых являются разделяющимися функциями (представимы в виде конечных сумм произведений функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной).

Ранее частный случай билинейного функционального уравнения рассматривался в работе [2].

Общий вид решений однородного билинейного функционального уравнения указан в работах [3, 4]. Однако эти результаты для разделения переменных для дифференциальных уравнений практически не применимы.

В первой части данной работы рассматривается задача разделения переменных (в смысле определения множества разделяющихся решений) для уравнений $Lu(x, y) + R(x, y) = 0$, где $L$ — разделяющийся оператор, определенный на некотором множестве вектор-функций от двух переменных $x$, $y$; $R(x, y)$ — известная вектор-функция, которая также разделяется. Во второй части рассматривается обобщение этой задачи на случай тензорного произведения двух сепарабельных гильбертовых пространств. Для этого используются выведенные в работе необходимые и достаточные условия разделения переменных для билинейных функциональных систем уравнений. Наконец, в третьей части работы приводится теорема, которая дает в определенном смысле обоснование приведенного метода разделения переменных в тензорном произведении двух сепарабельных гильбертовых пространств. Частным случаем этой теоремы являются подобные теоремы работы [5].

1. Рассмотрим систему билинейных функциональных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n_s} f_k^s(x)\, g_k^s(y) + R^s(x, y) = 0, \qquad s = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_\sigma)$, $y = (y_1, \dots, y_\tau)$, $f_k^s(x)$, $g_k^s(y)$ $(s = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n_s)$ — неизвестные функции независимых переменных $x_1, \dots, x_\sigma$ и $y_1, \dots y_\tau$ соответственно. Предполагается, что существуют разбиения множества $S = \{(s, k)\}_{\substack{s=1,\dots,m,\\ k=1,\dots,n_s}}$, $S = \bigcup_{r=1}^{l_1} S_r^1$, $S = \bigcup_{r=1}^{l_2} S_r^2$ ($l_1$, $l_2$—некоторые натуральные числа, $1 \leqslant l_1, l_2 \leqslant n_1 + \dots + n_m$), такие, что $S_k^i \cap S_l^i = \varnothing$ при $k \neq l$, $i = 1, 2$ и все функции $f_k^s(x)$ соответственно $g_{k'}^{s'}(y)$, для которых $(s, k)$ принадлежат одному и тому же $S_r^1$, $(s', k')$ принадлежат одному и тому же $S_r^2$, равны между собой. $R^s(x, y)$ $(s = 1, \dots, m)$ — известные функции, причем

$$R^s(x, y) = R_1^{s1}(x)\, R_1^{s2}(y) + \dots + R_{\gamma_s}^{s1}(x)\, R_{\gamma_s}^{s2}(y).$$

Пусть $i^r = (i_1, \dots, i_r)$ и $j^r = (j_1, \dots, j_{n-r})$ $(r = 1, \dots, n)$ — целочисленные векторы, координаты которых удовлетворяют условиям $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n$ и $1 \leqslant j_1 < \dots < j_{n-r} \leqslant n$, причем $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r}$ образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, n$. Для $r = 0$ пусть $i^0 = \varnothing$, т. е. $i^0$ — пустое множество, а $j^0 = (1, \dots, n)$. Пусть далее $\alpha_{ij}^{i^r}$ $(i = j_1, \dots, j_{n-r},\ j = i_1, \dots, i_r)$ — некоторые действительные числа. Обозначим через $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \dots, n)$ квадратную матрицу $\| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$, элементы которой определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j = i_s \text{ при некотором } 1 \leqslant s \leqslant r, \\ \alpha_{ij}^{i^r}, \text{ если } i = j_t,\ j = i_s \text{ при некоторых } 1 \leqslant t \leqslant n - r,\ 1 \leqslant s \leqslant r, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $r = 0$, то $A[i^0] = 0$. Матрица $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \dots, n)$ обладает таким свойством: для любого натурального числа $k$ $(A[i^r])^k = A[i^r]$.

Теорема 1. *Для того чтобы функции* $f_k^s(x)$, $g_k^s(y)$ $(s = 1, \dots, m;$ $k = 1, \dots, n_s)$ *удовлетворяли системе* (1), *необходимо и достаточно, чтобы для некоторой матрицы* $A[i^r]$ $(r \leqslant n_1 + \dots + n_m + \gamma_1 + \dots + \gamma_m)$

$$f = (f_1^1, \dots, f_{n_1}^1, R_1^{11}, \dots, R_{\gamma_1}^{11}, \dots, f_1^m, \dots, f_{n_m}^m, R_1^{m1}, \dots, R_{\gamma_m}^{m1}),^*$$

$$g_s = (\underbrace{0, \dots\dots\dots, 0}_{n_1 + \dots + n_{s-1} + \gamma_1 + \dots + \gamma_{s-1}}, g_1^s, \dots, g_{n_s}^s, R_1^{s2}, \dots, R_{\gamma_s}^{s2}, \underbrace{0, \dots\dots\dots, 0}_{n_{s+1} + \dots + n_m + \gamma_{s+1} + \dots + \gamma_m})$$

---

* Здесь и далее запись $a = (a_1, \dots, a_l)$ означает вектор-столбец, записанный в строку.

*удовлетворяли системе*

$$(E - A[i^r])f = 0,\ A'[i^r]g_s = 0, \qquad s = 1, \dots, m, \tag{2}$$

*где* $E$ — *единичная матрица порядка* $n_1 + \dots + n_m + \gamma_1 + \dots + \gamma_m$, *а* $A'[i^r]$ — (*здесь и далее*) *транспонированная матрица* $A[i^r]$.

Пусть теперь имеем уравнение

$$Lu(x, y) + R(x, y) = 0, \tag{3}$$

где $L = (L_{sk})$ $(s = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$ — оператор, определенный на некотором множестве вектор-функций $u(x, y) = (u_1(x, y), \dots, u_n(x, y))$ от двух переменных $x = (x_1, \dots, x_\sigma)$ и $y = (y_1, \dots, y_\tau)$,

$$Lu(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} L_{1k}u_k(x, y), \dots, \sum_{k=1}^{n} L_{mk}u_k(x, y)\right),$$

а $R(x, y) = (R^1(x, y), \dots, R^m(x, y))$ — известная вектор-функция, причем

$$R^s(x, y) = R_1^{s1}(x)R_1^{s2}(y) + \dots + R_{\gamma_s}^{s1}(x)R_{\gamma_s}^{s2}(x), \qquad s = 1, \dots, m.$$

Будем говорить, что оператор $L$ разделяющийся, если существуют совокупности операторов $L_{sk,x}^{ij}$ и $L_{sk,y}^{ij}$ $(i = 1, \dots, n_{sk};\ j = 1, \dots, l; n_{sk}, l$ — некоторые натуральные числа) таких, что $L_{sk,x}^{ij}$ действуют только по переменной $x$, а $L_{sk,y}^{ij}$ только по переменной $y$ и для всех вектор-функций вида

$$u(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{l} X_{1i}(x)Y_{1i}(y), \dots, \sum_{i=1}^{l} X_{ni}(x)Y_{ni}(y)\right), \tag{4}$$

на которых определен оператор $L$,

$$Lu = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_{1k}}\sum_{j=1}^{l} L_{1k,x}^{ij}X_{kj}L_{1k,y}^{ij}Y_{kj}, \dots, \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_{mk}}\sum_{j=1}^{l} L_{mk,x}^{ij}X_{kj}L_{mk,y}^{ij}Y_{kj}\right).$$

Для каждого $s = 1, \dots, m$ упорядочим сборный индекс $(k, i, j)$ и через $(k_s(\tau), i_s(\tau), j_s(\tau))$ $(\tau = 1, \dots, n_s$, где $n_s = (n_{s1} + \dots + n_{sn})\,l)$ обозначим индекс, который отвечает номеру $\tau$.

Теорема 2. *Функция* (4) *удовлетворяет уравнению* (3) *тогда и только тогда, когда*

$$f = (L_{1k_1(1),x}^{i_1(1)j_1(1)}X_{k_1(1)j_1(1)}, \dots, L_{1k_1(n_1),x}^{i_1(n_1)j_1(n_1)}X_{k_1(n_1)j_1(n_1)}, R_1^{11}, \dots, R_{\gamma_1}^{11}, \dots$$

$$\dots, L_{mk_m(1),x}^{i_m(1)j_m(1)}X_{k_m(1)j_m(1)}, \dots, L_{mk_m(n_m),x}^{i_m(n_m)j_m(n_m)}X_{k_m(n_m)j_m(n_m)}, R_1^{m1}, \dots, R_{\gamma_m}^{m1}),$$

$$g_s = (\underbrace{0, \dots\dots\dots, 0}_{n_1+\dots+n_{s-1}+\gamma_1+\dots+\gamma_{s-1}},\ L_{sk_s(1),y}^{i_s(1)j_s(1)}Y_{k_s(1)j_s(1)}, \dots, L_{sk_s(n_s),y}^{i_s(n_s)j_s(n_s)}Y_{k_s(n_s)j_s(n_s)},\ R_1^{s2}, \dots$$

$$\dots, R_{\gamma_s}^{s2}, \underbrace{0, \dots\dots\dots, 0}_{n_{s+1}+\dots+n_m+\gamma_{s+1}+\dots+\gamma_m}), \qquad s = 1, \dots, m,$$

*при некоторой матрице* $A[i^r]$ $(r \leqslant n_1 + \dots + n_m + \gamma_1 + \dots + \gamma_m)$ *удовлетворяют системе* (2).

При доказательстве теоремы 2 используется теорема 1. Обозначим через $A_n$ множество всех матриц $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \dots, n)$, в которых элементы $\alpha_{ij}^{i^r}$ рассматриваются как параметры (легко видеть, что $A_n$ содержит $2^n$ видов матриц). Тогда, как следствие из последней теоремы, вытекает такое утверждение: множество всех решений вида (4) уравнения (3) с разделяющимся оператором

$L$ совпадает с множеством решений (которые принадлежат области определения оператора $L$) совокупности систем

$$(E - A)f = 0, \; A'g_s = 0, \qquad s = 1, \dots, m, \; A \in A_{n_1+\dots+n_m+\gamma_1+\dots+\gamma_m}.$$

2. Пусть $H^i$ $(i = 1, 2)$ — два сепарабельных гильбертовых пространства, элементы которых будем обозначать через $f^i, g^i$ $(i = 1, 2)$ и т. д., а скалярные произведения через $(,)_i$ $(i = 1, 2)$. Через $H^1 \otimes H^2$ обозначим тензорное произведение этих пространств, элементы которого будут обозначаться через $f$, $g$ и т. д., а скалярное произведение через $(,)$. Кроме того, для элемента $f = f_1^1 \otimes f_1^2 + \dots + f_m^1 \otimes f_m^2 \in H^1 \otimes H^2$ и элемента $f^1 \in H^1$ положим по определению

$$\langle f^1, f \rangle_1 = \sum_{i=1}^{m} (f^1, f_i^1)_1 f_i^2 \in H^2.$$

Для произвольного $f \in H^1 \otimes H^2$ $\langle f^1, f \rangle_1$ определяется как соответствующий предел [5 — 7].

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^1 \otimes f_k^2 + g = 0, \tag{5}$$

где $f_k^1$, $f_k^2$ $(k = 1, \dots, n)$ — неизвестные элементы, а $g = \sum_{i=1}^{m} g_i^1 \otimes g_i^2$.

Теорема 3. *Для того чтобы* $f_k^1$, $f_k^2$ $(k=1, \dots, n)$ *удовлетворяли уравнению* (5), *необходимо и достаточно, чтобы для некоторой матрицы* $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \dots, n + m)$

$$f_1 = (f_1^1, \dots, f_n^1, g_1^1, \dots, g_m^1) \;\; \text{и} \;\; f_2 = (f_1^2, \dots, f_n^2, g_1^2, \dots, g_m^2)$$

*удовлетворяли системе*

$$(E - A[i^r])f_1 = 0, \; A'[i^r]f_2 = 0, \tag{6}$$

*где* $E$ *— единичная матрица порядка* $n + m$.

Будем говорить, что оператор $L$, определенный на некотором множестве пространства $H^1 \times H^2$ (область определения оператора $L$, как обычно, будем обозначать через $D(L)$), разделяющийся, если $L$ можно представить в виде

$$L = L_1^1 \otimes L_1^2 + \dots + L_k^1 \otimes L_k^2,$$

где $D(L_1^i) = \dots = D(L_k^i) = D_i$ $(i = 1, 2)$ и для произвольного элемента $g = g_1^1 \otimes g_1^2 + \dots + g_n^1 \otimes g_n^2 \in D(L)$, $g_1^i, \dots, g_n^i \in D_i$ $(i = 1, 2)$.

Если теперь в уравнении

$$Lg + f = 0 \tag{7}$$

оператор $L$ разделяющийся $(D(L) \in H^1 \otimes H^2)$, а $f = \sum_{i=1}^{m} f_i^1 \otimes f_i^2$, то верна следующая теорема.

Теорема 4. *Элемент* $g = g_1^1 \otimes g_1^2 + \dots + g_n^1 \otimes g_n^2 \in D(L)$ *тогда и только тогда удовлетворяет уравнению* (7), *когда*

$$f_1 = (L_1^1 g_1^1, \dots, L_1^1 g_n^1, \dots, L_k^1 g_1^1, \dots, L_k^1 g_n^1, f_1^1, \dots, f_m^1),$$

$$f_2 = (L_1^2 g_1^2, \dots, L_1^2 g_n^2, \dots, L_k^2 g_1^2, \dots, L_k^2 g_n^1, f_1^2, \dots, f_m^2)$$

*при некоторой матрице* $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \ldots, nk+m)$ *удовлетворяют системе* (6), *где* $E$ — *единичная матрица порядка* $nk+m$.

При доказательстве теоремы 4 используется теорема 3.

Как следствие из последней теоремы вытекает такое утверждение: множество всех решений вида $g = g_1^1 \otimes g_1^2 + \ldots + g_n^1 \otimes g_m^2$ уравнения (7) с разделяющимся оператором $L$ совпадает с множеством решений (которые принадлежат $D(L)$) совокупности систем

$$(E - A) f_1 = 0, \ A' f_2 = 0, \ A \in A_{nk+m}.$$

3. Для оператора $L$, который разделяется, обозначим через $L^{i^r}$ оператор, определенный на $D_1$ с областью значений в прямом произведении $k - r$ копий пространства $H^1$:

$$L^{i^r} f^1 = (L_1^{i^r} f^1, \ldots, L_{k-r}^{i^r} f^1) \qquad (f^1 \in D_1),$$

где $L_t^{i^r} = L_{i_s}^1 - \sum\limits_{s=1}^{r} \alpha_{ts}^{i^r} L_{i_s}^1$, $t = 1, \ldots, k-r$, а через $L^{j^r}$ оператор, определенный на $D_2$ с областью значений в прямом произведении $r$ копий пространства $H^2$:

$$L^{j^r} f^2 = (L_1^{j^r} f^2, \ldots, L_r^{j^r} f^2) \qquad (f^2 \in D_2),$$

где $L_s^{j^r} = L_{i_s}^2 + \sum\limits_{t=1}^{k-r} \alpha_{ts}^{i^r} L_{j_t}^2$, $s = 1, \ldots, r$.

Скажем, что операторы $L_1^1, \ldots, L_k^1$ имеют обобщенное общее спектральное представление, если для некоторых целых чисел $r_1, \ldots, r_p$ $(0 \leqslant r_1 < \ldots \ldots < r_p \leqslant k)$ существуют совокупности целочисленных векторов $i^{r\sigma}(l) = (i_1^{r\sigma}(l), \ldots, i_{r_\sigma}^{r\sigma}(l))$ $(\sigma = 1, \ldots, p;\ l = 1, \ldots, n_\sigma)$ и совокупности действительных чисел $\alpha_{ts}^{i^{r\sigma}(l)}$ $(\sigma = 1, \ldots, p;\ t = 1, \ldots, k - r_\sigma;\ s = 1, \ldots, r_\sigma;\ l = 1, \ldots, n_\sigma)$ таких, что множество решений совокупности уравнений

$$L^{i^{r\sigma}(l)} f^1 = 0 \tag{8}$$

образует полную ортонормированную систему $\{f_n^1\}$ в пространстве $H^1$.

Далее значения $\sigma$ и $l$, для которых $f_n^1$ является решением уравнения (8), будем обозначать через $\sigma(n)$ и $l(n)$, а оператор $L^{j^{r\sigma(n)}(l(n))}$ через $L_n$.

Если, кроме того, система

$$\{L^1_{i_s^{r\sigma(n)}(l(n))} f_n^1\} \qquad s = 1, \ldots, r_{\sigma(n)};\ n = 1, 2, \ldots$$

также полна и ортонормированная в $H^1$ и для произвольного $f \in R \subset H^1 \otimes H^2$ и произвольного $n$

$$f_n = (\langle L^1_{i_1^{r\sigma(n)}(l(n))} f_n^1, f \rangle_1, \ldots, \langle L^1_{i^{r\sigma(n)}_{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1, f \rangle_1) \tag{9}$$

принадлежит области определения оператора $L_n^{-1}$ (а последний существует), то будем говорить, что операторы $L_1^1, \ldots, L_k^1$ и $L_1^2, \ldots, L_k^2$ $R$-согласованны.

Теорема 5. *Если оператор* $L$, *определенный в пространстве* $H^1 \otimes H^2$, *замкнут и разделяющийся, причем операторы* $L_1^1, \ldots, L_k^1$ и $L_1^2, \ldots, L_k^2$ *$R$-согласованны, а операторы* $L_n^{-1}$ *равномерно ограничены, то уравнение* $Lg =$

$= f$ *имеет решение для произвольного* $f \in R$ *и оно представляется в виде*

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \otimes L_n^{-1} f_n,$$

*где* $f_n$ *определяется по формуле* (9).

## ЛИТЕРАТУРА


1. M. H. Martin, A generalization of the method of separation of variables, J. Rational Mech. and Analysis, **2**, N 2, 1953 315—327.
2. J. Birkhoff, Hidrodynamics, Princeton University Press, 1950.
3. J. Aczél, Megjegyzés a «Valtozòk szétvalasztasànak mòdszeréher» és annak àltalànositàsa, «Mat. lapok», **12**, N 1—2, 1961, 62—71.
4. J. Aczél, Sur une classe d'equations fonctionnelles bilineaires à plusieurs fonctions inconnues, «Publ. Elektrotehn fac. Univ. Beogradu. Mat. i fiz., N 61—64, 1961, 12—20.
5. B. Fridman, An abstract formulation of the method of separation of variables, Proc. conf. different. equations College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 209—226.
6. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
7. R. Schatten, A theory of cross—spaces, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Prinseton, N 26, 1950.



Поступила 4.VIII 1973 г.,
после переработки — 8.II 1974 г.


Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР