УДК 517.94

О некоторых свойствах линейных дифференциальных систем

И. И. Старун

1. В данной работе рассматривается система вида

$$\frac{dx}{dt} = [I - A(t)]x, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

где

$$I = (\beta_{ik}), \quad \beta_{ik} = \begin{cases} 0, & k \neq i+1, \\ 1, & k = i+1, \end{cases} \tag{2}$$

$$A(t) = (a_{ik}(t)), \quad a_{ik}(t) = \begin{cases} 0, & i \leqslant n-1, \\ a_k(t), & i = n, \ k = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{3}$$

Согласно [2] эта система при помощи линейного преобразования приводится к L-диагональному виду [3]

$$\frac{dy}{dt} = [\Lambda(t) + C(t)]\, y, \tag{4}$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$, $C(t) = (c_{ij}(t))$ — $n \times n$-матрица. При этом оказывается, что такое приведение возможно, если выполняется условие

$$a_1(t) \neq 0, \quad t \geqslant t_0. \tag{5}$$

В работе показано, что такое приведение можно осуществить и тогда, когда условие (5) не выполняется. Один из пунктов работы посвящен рассмотрению систем вида

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y, \quad t \geqslant t_0, \tag{6}$$

с $n \times n$-матрицей $A(t) = (a_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, n}$. В [3, 4] показано, что если собственные значения матрицы $A(t)$ при $t \geqslant T \geqslant t_0$ простые, то систему (6) можно привести к L-диагональному виду (4). В случае же кратных собственных значений матрицы $A(t)$ систему (6), как показано в [5, 6], можно привести к обобщенному L-диагональному виду при условии, что собственные значения и соответствующие им элементарные делители сохраняют постоянную кратность при $t \geqslant t_0$. Если же собственные значения (или соответствующие им элементарные делители) не сохраняют постоянной кратности при $t \geqslant t_0$, то такое приведение методами из [2—6] невозможно. Однако при определенных условиях система (6) не зависимо от поведения собственных значений матрицы $A(t)$ приводится к системе (1), последняя же к системе (4), что проиллюстрировано на примере системы второго порядка.

На основании приведения системы (1) к L-диагональному виду указаны асимптотика решений, условия устойчивости и интегрируемости системы в квадратурах.

2. Предположим, что функции $a_k(t)$, $k=\overline{1, n}$, удовлетворяют условиям:

1) $a_k(t) \in C^m_{[t_0,\infty)}$;

2) $a_1(t) \neq 0,\ t \in [t_0, \infty)$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = [I - \varepsilon A(\tau)]\, x, \tag{7}$$

где $\tau = \varepsilon t$, ε — параметр (при $\varepsilon = 1$ система (7) тождественна системе (1)). При помощи линейной подстановки

$$x = Q_m(\tau, \mu)\, y = \sum_{s=0}^{n+m-1} \mu^s Q^{(s)}(\tau)\, y, \quad \mu = \sqrt[n]{\varepsilon}, \tag{8}$$

($Q^{(s)}(\tau)$ — $n \times n$-матрицы) система (7) приводится к системе

$$Q_m(\tau, \mu) \frac{dy}{dt} = \{IQ_m(\tau, \mu) - \varepsilon\, [Q'_m(\tau, \mu) + A(\tau)\, Q_m(\tau, \mu)]\}\, y \tag{9}$$

$\left({}' = \dfrac{d}{d\tau}\right)$. Матрица $Q_m(\tau, \mu)$ согласно [2, 5, 6] строится исходя из равенства

$$IQ_m(\tau, \mu) - \varepsilon\, [Q'_m(\tau, \mu) + A(\tau)\, Q_m(\tau, \mu)] = Q_m(\tau, \mu)\, [\Lambda_m(\tau, \mu) + \mu^{m+n} C_m(\tau, \mu)], \tag{10}$$

в котором

$$\Lambda_m(\tau, \mu) = \sum_{s=1}^{m} \mu^s \Lambda^{(s)}(\tau), \quad \Lambda^{(s)}(\tau) = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{(s)}(\tau), \ldots, \lambda_n^{(s)}(\tau)\}, \tag{11}$$

$C_m(\tau, \mu)$ — $n \times n$-матрица, подлежащая, как и $\Lambda_m(\tau, \mu)$, определению.

Сравнив коэффициенты при μ^s, $s = \overline{0, n+m-1}$, в (10), приходим к матричной системе

$$IQ^{(s)}(\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} Q^{(k)}(\tau)\, \Lambda^{(s-k)}(\tau) + Q'^{(s-n)}(\tau) + A(\tau)\, Q^{(s-n)}(\tau), \tag{12}$$

метод решения которой указан в [2]. При этом элементы матрицы $\Lambda^{(s)}(\tau)$ определяются по формулам

$$\lambda_p^{(s)}(\tau) = -\frac{1}{n\,[\lambda_p^{(1)}(\tau)]^{n-1}} \Biggl\{ [h_p^{(n+s-1)}(\tau)]_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l_{n-k}=n-k+1}^{n+s-k-2} \cdots \sum_{l_1=1}^{l_2-1} \lambda_p^{(l_1)}(\tau) \times$$
$$\times \lambda_p^{(l_2-l_1)}(\tau) \ldots \lambda_p^{(n+s-k-l_{n-k})}\, [\lambda_p^{(1)}(\tau)]^{k-1} \Biggr\}, \quad s = \overline{2, m}, \quad p = \overline{1, n}, \tag{13}$$

$$\lambda_p^{(1)}(\tau) = \sqrt[n]{a_1(\tau)}\left[\cos\frac{(2p+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2p+1)\pi}{n}\right] \tag{14}$$

при $a_1(\tau) > 0$ и

$$\lambda_p^{(1)}(\tau) = \sqrt[n]{-a_1(\tau)}\left[\cos\frac{2p\pi}{n} + i\sin\frac{2p\pi}{n}\right] \tag{15}$$

при $a_1(\tau) < 0$ ($[h_p^{(l)}(\tau)]_1$ — первая компонента известного вектора). Зная матрицы $\Lambda^{(s)}(\tau)$, $s = \overline{1, m}$, из (12) легко определяются матрицы $Q^{(s)}(\tau)$, $s = \overline{0, n+m-1}$, при этом

$$Q^{(n+m-1)}(\tau) = 0, \quad Q^{(0)}(\tau) = (q_{ij}^{(0)}(\tau)), \quad q_{ij}^{(0)}(\tau) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1, \end{cases} \; i, j = \overline{1, n},$$

а первые строчки матриц $Q^{(s)}(\tau)$, $s = \overline{1, n+m-2}$, — нулевые. (Подробнее об определении матриц $Q_m(\tau, \mu)$, $\Lambda_m(\tau, \mu)$ см. [2].) Предположим, что $\det Q_m(\tau, \mu) \neq 0$ при $\mu = 1$ и $t \in [t_0, \infty)$. Тогда систему (9) согласно (10) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = [\Lambda_m(t, 1) + C_m(t, 1)]\, y, \tag{16}$$

где

$$C_m(t, 1) = -Q_m^{-1}(t, 1)\left[\sum_{i=0}^{n-2}\frac{dQ^{(m+i)}(t)}{dt} + A(t)\sum_{i=0}^{n-2} Q^{(m+i)}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{m-i} Q^{(n+m-r)}(t)\,\Lambda^{(i+r)}(t)\right] = -Q_m^{-1}(t, 1)\,\overset{*}{C}_m(t, 1). \tag{17}$$

Исходя из условий 1), 2) и способа определения матриц $Q_m(t, 1)$, $\Lambda_m(t, 1)$, $C_m(t, 1)$, нетрудно усмотреть, что эти матрицы имеют непрерывные элементы.

Если теперь элементы матриц $\Lambda_m(t, 1) = \operatorname{diag}\{\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)\}$, $C_m(t, 1) = (c_{ijm}(t))$ удовлетворяют условиям:

а) функции $Re(\omega_i(t) - \omega_j(t))$, $i, j = \overline{1, n}$, не меняют знак при $t \geqslant T \geqslant t_0$;

б) $c_{ijm}(t) \in L_{[t_0, \infty)}$, то согласно теореме 1.1 [3] фундаментальная матрица решений системы (16) имеет вид:

$$Y(t) = [E + \Omega(t)]\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda_m(t, 1)\,dt\right), \tag{18}$$

где E — единичная матрица, $\Omega(t)$ — непрерывная $n \times n$-матрица, причем $\Omega(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда фундаментальная матрица решений системы (1) представима в виде

$$X(t) = Q_m(t, 1)[E + \Omega(t)]\exp\left(\int_{t_0}^{t}\Lambda_m(t, 1)\,dt\right). \tag{19}$$

Исходя из (19), можно указать достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости системы (1). Для этого введем в рассмотрение функции

$$\rho_m(t) = \max_{i, j = \overline{1, n}} |q_{ijm}(t)|, \tag{20}$$

$$u_m(t) = \max_{i = \overline{1, n}} \int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\omega_i(t)\,dt \tag{21}$$

$(Q_m(t, 1) = (q_{ijm}(t))$. Тогда, если выполняются условия а), б) и условие

$$\rho_m(t) \exp_{t\in[t_0,\infty)} u_m(t) < \infty, \tag{22}$$

то система (1) устойчива, если же вместе с условиями а), б) выполняется условие

$$\rho_m(t) \exp u_m(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{23}$$

то система (1) асимптотически устойчива. Так, если система (1) — система второго порядка, то при $m = 1$ и $a_1(t) > 0$ условия устойчивости (22) имеют вид:

1′) $a_1(t) < \infty, \quad t \in [t_0, \infty)$;

2′) $\int\limits_{t_0}^{\infty} \left| \frac{a_1'(t) + 2a_1(t)\, a_2(t)}{4a_1(t)} \right| dt < \infty,$

которые выполняются, например, при $a_1(t) \equiv c,\ a_2(t) = O(1/t^2)$.

Описанный метод приведения системы (1) к виду (16) позволяет решать еще один вопрос — вопрос об интегрируемости системы в квадратурах. Предположим, что матрица $C_m(t, 1)$ в (16) такова, что все ее элементы, стоящие под (или над) главной диагональю, равны нулю. Тогда система (16), как треугольная, интегрируется в квадратурах, а значит интегрируется в квадратурах и система (1). Поэтому, приравняв нулю указанные выше элементы матрицы $C_m(t, 1)$ (при каждом $m = 1, 2, \ldots$ отдельно), получаем условия интегрируемости системы (1) в квадратурах.

Поясним сказанное на примере уравнения второго порядка вида

$$z'' + a_2(t)\, z' + a_1(t)\, z = 0, \tag{24}$$

которое заменой переменных $z = x_1,\ z' = x_2$ приводится к эквивалентной системе (1). Преобразованием (8) система (1) приводится к системе (16), в которой матрица из (17) имеет вид

$$\overset{*}{C}_m(t, 1) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \overset{*}{c}_{21m(t)} & \overset{*}{c}_{22m(t)} \end{Vmatrix}, \tag{25}$$

где

$$\overset{*}{c}_{2im}(t) = \frac{d\lambda_i^{(m)}(t)}{dt} + a_2(t)\, \lambda_i^{(m)}(t) + \sum_{k=2}^{m} \sum_{j=0}^{k-2} \lambda_i^{(k)}(t)\, \lambda_i^{(m-j)}(t) \tag{26}$$

здесь $\lambda_1^{(1)}(t) = -\lambda_2^{(1)}(t) = \sqrt{-a_1(t)},$

$$\lambda_i^{(s)}(t) = -\frac{1}{2\lambda_i^{(1)}(t)} \left[a_2(t)\, \lambda_i^{(s-1)}(t) + \frac{d\lambda_i^{(s-1)}(t)}{dt} + \sum_{k=2}^{s-1} \lambda_i^{(k)}(t)\, \lambda_i^{(s+1-k)}(t) \right],$$

$$s = \overline{2, m}, \quad i = 1,2). \tag{27}$$

Если теперь $\overset{*}{c}_{21m}(t) \equiv 0$ (или $\overset{*}{c}_{22m}(t) \equiv 0$), то матрица $C_m(t, 1)$ из (17) — треугольная и система (16) интегрируется в квадратурах. Так, при $m = 1$ условие интегрируемости уравнения (24) в квадратурах будет

$$a_1'(t) + 2a_1(t)\, a_2(t) \equiv 0, \tag{28}$$

а при $m = 2$ такое условие имеет вид

$$5a_1'^2(t) + 4a_1^2(t)\, a_2^2(t) - 4a_1(t)\, a_1''(t) - 8a_1^2(t)\, a_2'(t) \equiv 0. \tag{29}$$

Заметим, что условию (28) удовлетворяют, например, уравнения (1.1)—(1.29) из [7, стр. 548—551].

3. Пусть условие 2) п. 2 не выполняется. Тогда вместо вспомогательной системы (7) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = [I - \varepsilon A_1(\tau) - \mu^{n+1} A_2(\tau)]\, x, \tag{30}$$

где

$$A_1(\tau) = (a_{ik}^{(1)}(\tau)), \quad a_{ik}^{(1)}(\tau) = \begin{cases} 0, & i \leqslant n-1, \\ -b^2(\tau), & i = n, \ k = 1, \\ a_k(\tau), & i = n, \ k = \overline{2, n}, \end{cases} \tag{31}$$

$$A_2(\tau) = (a_{ik}^{(2)}(\tau)), \quad a_{ik}^{(2)}(\tau) = \begin{cases} b^2(\tau) + a_1(\tau), & i = n, \ k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \tag{32}$$

а функция $b(\tau)$ удовлетворяет условиям 1), 2) п. 2 (в частности, можно взять $b(t) = \mathrm{const}$). При этом способ определения матриц $Q_m(t, 1)$, $\Lambda_m(t, 1)$, $C_m(t, 1)$ тот же, что и в п. 2 (роль $a_1(\tau)$ играет $-b^2(\tau)$), при этом

$$C_m(t, 1) = -Q_m^{-1}(t, 1)\left[\frac{dQ^{(m)}(t)}{dt} + A_1(t)\, Q^{(m)}(t) + \right.$$

$$\left. + A_2(t) \sum_{i=m-1}^{n+m-2} Q^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{r=1}^{m-i} Q^{(n+m-r)}(t)\, \Lambda^{(i+r)}(t)\right]. \tag{33}$$

Функцией $b(t)$, в частности, можно распорядиться при нахождении условий интегрируемости системы (1) в квадратурах. Укажем некоторые из таких условий для уравнения (24). Так, при $m = 1$ получаем, что для интегрируемости уравнения (24) в квадратурах достаточно выполнения одного из двух условий.

$$b'(t) + a_2(t)\, b(t) + b^2(t) + a_1(t) \equiv 0, \tag{34}$$

$$b'(t) + a_2(t)\, b(t) - b^2(t) - a_1(t) \equiv 0, \tag{35}$$

а при $m = 2$ одно из условий имеет вид

$$2b(t)\, b''(t) - b^2(t)\,(2a_1(t) - 2a_2'(t) - a_2^2(t)) - 3b'^2(t) -$$

$$- 3a_1(t)\, b'(t) + 2a_1'(t)\, b(t) - a_1^2(t) - b^4(t) \equiv 0. \tag{36}$$

Если $b(t) = \sqrt{-a_1(t)}$, то из (34) — (36) получаем (28), (29).

З а м е ч а н и е. Выбор вспомогательной системы (30) не однозначен. Вместо этой системы можно рассмотреть систему

$$\frac{dx}{dt} = [I - \varepsilon A_1(\tau) - \mu^{n+k} A_2(\tau)]\, x, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

При этом для различных значений k (при одном и том же m) будут, вообще говоря, различными и матрицы $C_m(t, 1)$. Поэтому различными будут и условия, налагаемые на функции $a_k(t)$, $\kappa = \overline{1, n}$, при рассмотрении вопросов, затронутых в п. 2.

4. Как отмечалось в п. 1, в том случае, когда собственные значения матрицы $A(t)$ (или соответствующие им элементарные делители) не сохраняют постоянной кратности при $t \geqslant t_0$, изложенные в [2—6] методы не дают возможности провести исследование системы (6) по указанным в п. 2 вопросам. Однако, как известно, при определенных условиях систему (6) можно свести к эквивалентному уравнению n-го порядка вида

$$z^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(t)\, z^{(n-i-1)} = 0, \tag{38}$$

которое заменой

$$z = x_1, \quad z^{(i)} = x_{i+1} \quad (i = \overline{1, n-1}) \tag{39}$$

приводится к эквивалентной системе (1), исследование которой проведено в п. 2. Так как в общем случае системы n-го порядка выкладки очень громоздкие, ограничимся рассмотрением системы второго порядка.

Итак, пусть элементы 2×2-матрицы $A(t) = (a_{ij}(t))$ удовлетворяют условиям:

1″) $a_{12}(t) \neq 0$ (или $a_{21}(t) \neq 0$), $\quad t \in [t_0, \infty)$;

2″) $a_{ij}(t) \in C^{m+1}_{[t_0, \infty)}$, $\quad i, j = 1,2$,

тогда систему (6) в рассматриваемом случае можно заменить эквивалентным уравнением (24), в котором

$$a_1(t) = a_{12}(t)\, a_{21}(t) + a'_{11}(t) - a_{11}(t)\, a_{22}(t) - \frac{a_{11}(t)\, a'_{12}(t)}{a_{12}(t)} \tag{40}$$

при $a_{12}(t) \neq 0$ или

$$a_1(t) = a_{12}(t)\, a_{21}(t) + a'_{22}(t) - a_{11}(t)\, a_{22}(t) - \frac{a_{22}(t)\, a'_{21}(t)}{a_{21}(t)} \tag{41}$$

при $a_{21}(t) \neq 0$,

$$a_2(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \frac{a'_{12}(t)}{a_{12}(t)} \quad \left(\text{или } a_2(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \frac{a'_{21}(t)}{a_{21}(t)}\right). \tag{42}$$

Уравнение (24), как указано в п. 2, приводится к эквивалентной системе (1). При этом, учитывая п. 3, безразлично удовлетворяет ли функция $a_1(t)$ условию 1) п. 2 или нет. Заметим, что условие 1″) (условие приводимости системы к уравнению) с увеличением порядка системы намного усложняется; так, для системы третьего порядка это условие имеет вид

$$a_{12}(t)\, a'_{13}(t) - a_{13}(t)\, a'_{12}(t) + a^2_{12}(t)\, a_{23}(t) - a^2_{13}(t)\, a_{32}(t) + \\ + a_{12}(t)\, a_{13}(t)\,(a_{33}(t) - a_{22}(t)) \neq 0. \tag{43}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, «Наукова думка», К., 1966.
2. И. И. Старун, О приведении систем линейных дифференциальных (разностных) уравнений к L-диагональному (l-диагональному) виду, Труды семинара по математической физике и нелинейным колебаниям, вып. 3, Изд. Института математики АН УССР, К., 1969.
3. И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, К., 1954.
4. Т. Г. Васьківська, Деякі нові випадки асимптотичного поводження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, Наукові зап. Київського педінституту, 19, 1956.
5. Н. И. Шкиль, Приведение систем линейных дифференциальных уравнений к обобщенному L-диагональному виду, Дифференц. уравнения, т. 2, № 11, 1966.
6. М. І. Шкіль, Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях, «Вища школа» К., 1971.
7. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», М., 1971.

Поступила 22.V 1974 г.

Гомельский государственный университет