УДК 517.512.6

О равномерном приближении многочленами на сегменте функций Бесселя с целым индексом

В. К. Столярчук

В статье при помощи методов, развитых В. К. Дзядыком, строятся алгебраические многочлены $P^*_{n+\nu}(J_\nu;\ x)$, которые приближают функции Бесселя первого рода с целым индексом примерно в $2^{n+\nu}$ раз лучше, чем соответствующие частные суммы рядов Тейлора.

Для доказательства этого факта предварительно приближаем функцию

$$\frac{J_\nu(hx)}{x^\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi(x) \tag{1}$$

при помощи многочленов $P^0_n(\varphi;\ x)$, а затем показываем, как незначительным изменением этих многочленов можно получить многочлены $P^*_{n+\nu}(J_\nu;\ x)$, которые осуществляют приближение функций Бесселя, близкое к наилучшему.

Заметим, что коэффициенты многочленов $P^*_{n+\nu}(J_\nu;\ x)$ вычисляются при помощи формул, содержащих лишь арифметические операции.

Ввиду соотношений $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ и $J'_0(x) = -J_1(x)$ [1], ограничимся рассмотрением только натуральных ν.

Теорема 1. *При любом четном n и $h>0$ алгебраические многочлены*

$$P^0_n(x) = P^0_n(\varphi;\ h;\ x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_{2k}x^{2k}, \tag{2}$$

где

$$a_{n-2k} = \tau_n \left\{ \frac{(n-2k-1)!!}{(n-2k)!\ (2\nu+n-2k)!!} \times \right.$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k+1+j}(n+2-2j)!(2\nu+n-2j)!!}{h^{2k+2-2j}(n-1-2j)!!} c^{(n+2)}_{n+2-2j} -$$

$$\left. - \frac{(n+2-2k)!}{h^2(n-2k)!} c^{(n+2)}_{n+2-2k} \right\} \tag{3}$$

и

$$\tau_n = \frac{h^\nu}{2^\nu \nu!} \left\{ \frac{1}{(2\nu)!!} \sum_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n+2-2j}{2}}(n+2-2j)!}{h^{n+2-2j}(n-1-2j)!!} (2\nu+n-2j)!!\, c^{(n+2)}_{n+2-2j} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{h^2} c^{(n+2)}_2 + c^{(n+2)}_0 \right\}^{-1} \tag{3'}$$

обладают тем свойством, что при всех $x \in [-1, 1]$ имеет место равенство

$$\varphi(x) - P^0_n(x) = \frac{J_\nu(hx)}{x^\nu} - P^0_n(x) = \tau_n T_{n+2}(x) - \frac{\tau_n}{2x^\nu}\int_0^x [-J_\nu(hx)Y_\nu(ht) +$$

$$+ Y_\nu(hx)J_\nu(ht)]\, t^{\nu+1}\left(\frac{2\nu+1}{t}T'_{n+2}(t) + h^2 T_{n+2}(t)\right)dt, \tag{4}$$

где через $c_i^{(l)}$ *обозначены* i*-е коэффициенты многочлена Чебышева* $T_l(x) = \cos l \arccos x$ *порядка* l, *а через* $J_\nu(x)$ *и* $Y_\nu(x)$ *— функции Бесселя* 1*-го и* 2*-го рода с целым индексом.*

Доказательство проводится по методике, разработанной В. К. Дзядыком в [2] и несколько видоизмененной автором в [3]. Отличие состоит в том, что функция $\varphi(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + \frac{2\nu + 1}{x}\varphi' + h^2\varphi = 0 \tag{5}$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = \frac{h^\nu}{2^\nu \nu!}, \quad \varphi'(0) = 0, \tag{5'}$$

а функцией Коши — Грина для уравнения (5) является функция

$$K(x, t) = \frac{t^{\nu+1}}{2x^\nu}[-J_\nu(hx)Y_\nu(ht) + Y_\nu(hx)J_\nu(ht)]. \tag{6}$$

Интегрируя по частям равенство (4) и используя при этом свойства функций Бесселя и многочленов Чебышева, после несложных преобразований убедимся в справедливости следующей леммы.

Лемма. *При всяком фиксированном* $h > 0$, *четных* n *и натуральных* ν *имеет место равенство*

$$J_\nu(hx) - x^\nu P_n^0(x) = \frac{\tau_n}{2^\nu}\left\{\left[1 - \frac{2\nu+1}{n+3} + \frac{3(\quad -\theta)}{(n+4)(n+3)}\right]T_{n+2+\nu}(x) + \right.$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{h^\nu}2^{2\nu-1}(2\nu+1)(\nu-1)!\,J_\nu(hx) + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_{2k+\nu}x^{2k+\nu} -$$

$$\left. - \theta\sum_{k=1}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}\left(1 - \frac{2\nu+1}{n+3}\right)c_{\nu-2k}^{(n+\nu+2)}x^{\nu-2k} + r_n(x)\right\}, \tag{7}$$

где

$$b_{2k+\nu} = 2^{\nu-1}(2\nu+1)\left(\frac{}{n+3} + \frac{1}{n+1}\right)c_{2k+1}^{(n+1)} +$$

$$+ \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+3}\right)\left(2^\nu c_{2k}^{(n+2)} - c_{\nu+2k}^{(n+\nu+2)}\right) + (\quad -\theta)\left[\frac{3\left(c_{2k+2}^{(n+3)} - c_{2k+1}^{(n+1)}\right)}{4(n+3)(n+4)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\left(\frac{c_{2k+2}^{(n+4)} - 2c_{2k+1}^{(n+3)})}{(n+3)(n+4)} - \frac{2c_{2k+2}^{(n+2)}}{(n+1)(n+3)} + \frac{c_{2k+2}^{(n)}}{n(n+1)}\right)\right], \tag{8}$$

$$r_n(x) = r_n(h, \nu; x) = \frac{1}{h^{\nu-2}}\,2^{2\nu-4}(\nu-2)!\,\rho_n(0)\,[\theta(2\nu+1) - 2(\nu-1)]\,x^\nu J_\nu(hx) +$$

$$+ 2^{\nu-2}[\theta(4\nu^2-1)x^{\nu-2} + h^2x^\nu]\cdot\rho_n(x) +$$

$$+ 2^{\nu-3}\int_0^x\{-J_\nu(hx)[\theta(2\nu+1)(t^\nu Y_\nu(ht))''' - h^2(t^{\nu+1}Y_\nu(ht))''] +$$

$$+ Y_\nu(hx)[\theta(2\nu+1)(t^\nu J_\nu(ht))''' - h^2(t^{\nu+1}J_\nu(ht))'']\}\,\rho_n(t)\,dt +$$

$$+ (1-\theta)\Big[-\frac{3}{2}h\widetilde{\rho}_n(x)J_1(hx)\ln x + 3hJ_1(hx)A_n(x) +$$

$$+\frac{3}{4}\int_0^x \{-J_1(hx)\,[(tY_1(ht))''-2h\ln t]'+Y_1(hx)\,[tJ_1(ht)]'''\}\,\tilde{\rho}_n(t)\,dt\Big]; \qquad (9)$$

здесь

$$\rho_n(x)=\frac{T_{n+4}(x)}{(n+4)(n+3)}-\frac{2T_{n+2}(x)}{(n+3)(n+1)}+\frac{T_n(x)}{(n+1)n},$$

$$\tilde{\rho}_n(x)=\rho_n(x)-\rho_n(0), \qquad (10)$$

$A_n(x)$ — некоторая непрерывная на сегменте [0, 1] функция, удовлетворяющая неравенству

$$|A_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\left[\frac{\ln(n+4)}{(n+4)(n+3)}+\frac{2\ln(n+2)}{(n+3)(n+1)}+\frac{\ln n}{(n+1)n}\right] \qquad (11)$$

и

$$\theta=\begin{cases}0, & \text{если } \nu=1,\\ 1, & \text{если } \nu\geqslant 2.\end{cases} \qquad (12)$$

Учитывая (9) — (12), заключаем, что

$$r_n(x)=r_n(h,\nu;x)=\begin{cases}O\left(\frac{1}{n^2}\right), & \text{если } \nu\geqslant 2,\\ O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), & \text{если } \nu=1.\end{cases}$$

Теорема 2. *Обозначим при каждом четном $n=2,4,\ldots,$ натуральном $\nu=1,2,3,\ldots$ и каком-нибудь фиксированном $h>0$ через*

$$P^*_{n+\nu}(x)=P^*_{n+\nu}[J_\nu(ht);x]=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}a^*_{2k+\nu}x^{2k+\nu}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}a^*_{\nu-2k}x^{\nu-2k}$$

многочлены, коэффициенты которых вычисляются по формулам

$$a^*_{2k+\nu}=\frac{a_{2k+\nu}}{1-\gamma_n}+\tau^*_n b_{2k+\nu}, \quad k=0,1,\ldots,\frac{n}{2},$$

$$a^*_{\nu-2k}=\theta\tau_n\left(1-\frac{2\nu+1}{n+3}\right)c^{(n+\nu+2)}_{\nu-2k}, \quad k=1,2,\ldots,\left[\frac{\nu}{2}\right],$$

в которых

$$\gamma_n=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2h)^\nu}\tau_n 2^{2\nu-1}(2\nu+1)(\nu-1)!, \quad \tau^*_n=\frac{|\tau_n|}{2^\nu(1-\gamma_n)},$$

а числа $a_{2k+\nu}$, $b_{2k+\nu}$ и τ_n определяются так же, как в лемме и теореме 1.

Тогда будут справедливы равенства

$$\|J_\nu(hx)-P^*_{n+\nu}(x)\|_{C_{[-1,1]}}=\|J_\nu(x)-P^*_{n+\nu}(x)\|_{C_{[-h,h]}}=$$

$$=\left(1+\begin{cases}O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right), & \text{если } \nu=1\\ O\left(\frac{1}{n^2}\right), & \text{если } \nu\geqslant 2\end{cases}\right)E_{n+\nu}[J_\nu(hx)],$$

где через $E_{n+\nu}[J_\nu(hx)]$ обозначена величина наилучшего равномерного приближения функции $J_\nu(hx)$ на сегменте $[-1,1]$ при помощи всевозможных многочленов $P_{n+\nu}(x)$ степени не выше $(n+\nu)$.

В частности, при $h=1$ для часто встречающейся функции $J_1(x)$ (а также $J_0(x)$) будут иметь место соотношения:

$$\| J_1(x) - P_{n+1}(x) \|_{C_{[-1,1]}} \leqslant \tau_n^* (1 + \alpha_n),$$

где $\alpha_n = -\dfrac{3}{n+3} + \dfrac{3}{(n+4)(n+3)} + 7|\rho_n| + |A_n|$;

$$\tau_n^* \leqslant \frac{1}{1-\beta_n} E_{n+1}[J_1(x)],$$

$$0 < \beta_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{(n+4)(n+3)} + 7|\rho_n| + |A_n| < 1, \quad n \geqslant 6,$$

и ρ_n *и* A_n *обозначают функции, фигурирующие в соотношениях* (10) *и* (11), *так что*

$$\| J_1(x) - P_{n+1}^*(x) \|_{C_{[-1,1]}} \leqslant (1 + \alpha_n^*) E_{n+1}[J_1(x)],$$

где $\alpha_n^* = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{1 - \beta_n}$.

Доказательство получаем сразу путем оценки снизу и сверху разности $J_\nu(hx) - P_{n+\nu}^*(x)$, полученной после переноса в левую часть равенства (7) выражения

$$\gamma_n J_\nu(hx) + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} b_{2k+\nu} x^{2k+\nu} - \theta \sum_{k=1}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+3}\right) c_{\nu-2k}^{(n+\nu+2)} x^{\nu-2k}$$

и последующим делением обеих частей полученного равенства на $(1 - \gamma_n)$ (см. [2 и 3]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. К. Дзядыку за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, М., 1949.
2. В. К. Дзядык, Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, $\sin x$ и др., УМЖ, т. 25, № 4. 1973.
3. В. К. Столярчук, О построении для функций $\mathrm{si}\, x$ и $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ многочленов, которые осуществляют их приближение, близкое к наилучшему, УМЖ, т. 26, №2, 1974.

Поступила 14.II 1973 г.
Институт математики АН УССР