УДК 517.54

Замечание о конформном отображении полуполос

Т. В. Строчик

В статье выводится асимптотическая формула для функции, осуществляющей конформное отображение криволинейной полуполосы S на прямолинейную в случае, если полуполоса S может быть вписана в полуполосу S_2 и в S можно вписать полуполосу S_1, где S_1 и S_2 удовлетворяют условиям теоремы Варшавского [1].

Пусть $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ — непрерывные, дифференцируемые на $[0, \infty)$ функции, причем $0 < \varphi_1(u) \leqslant \varphi_2(u)$. Пусть S — полуполоса в комплексной

w-плоскости $\{w = u + iv \mid u > 0;\ \varphi_-(u) \leqslant v \leqslant \varphi_+(u)\}$, где функции $\varphi_\pm(u)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам:

$$\varphi_1(u) \leqslant \varphi_+(u) \leqslant \varphi_2(u); \qquad -\varphi_2(u) \leqslant \varphi_-(u) \leqslant -\varphi_1(u).$$

Будем рассматривать полуполосы S такие, что для функций $\varphi_j(u)$, $j = 1, 2$, выполняются следующие условия:

1) $\lim\limits_{u\to\infty} \varphi_j'(u) = 0 \quad (j = 1, 2);$

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{[\varphi_j'(u)]^2}{\varphi_j(u)}\, du < \infty \quad (j = 1, 2);$

3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi_2(u) - \varphi_1(u)}{\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)}\, du < \infty;$

4) $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} = 1.$

Отобразим полуполосу S конформно и однолистно на прямолинейную полуполосу S_0 z-плоскости $\{z = x + iy \mid x > 0;\ 0 < y < 1\}$ при помощи аналитической функции $z = Z(w) = X(w) + iY(w)$ так, чтобы точке $w = +\infty$ соответствовала точка $z = +\infty$.

Т е о р е м а. *Если для полуполосы S выполняются условия* 1) —4), *то функция, осуществляющая конформное и однолистное отображение S на S_0, имеет вид*

$$Z(w) = \lambda + \frac{1}{2}\int_0^u \frac{du}{\varphi_1(u)} + \frac{i}{2}\left(\frac{v}{\varphi_1(u)} + 1\right) + o(1),$$

где λ — действительная постоянная и $o(1)$ стремится к нулю при $u \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит из двух частей. Сначала покажем, что при условиях 1)—3) имеет место

$$\operatorname{Re} Z(w) = \lambda + \frac{1}{2}\int_0^u \frac{du}{\varphi_1(u)} + o(1),$$

затем, что при условиях 1), 2), 4)

$$\operatorname{Im} Z(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\varphi_1(u)} + 1\right) + o(1).$$

Для доказательства первой части воспользуемся одним следствием из теоремы о модулях. Рассмотрим в z-плоскости прямолинейную полуполосу $S_0 = \{z = x + iy \mid x > 0;\ 0 < y < 1\}$. Проводя такие же рассуждения, как у Виттиха [2, стр. 163—166] для случая кольца, получаем следствие теоремы о модулях для прямоугольников.

Пусть t — некоторый действительный параметр $t \in (0, \infty)$, Γ_t — семейство жордановых кривых, каждая из которых соединяет прямые $y = 0$ и $y = 1$, лежит в S_0, не имеет общих точек с другой кривой семейства и для $t' > t$ $\Gamma_{t'}$ лежит правее Γ_t. Обозначим через $M(t_1, t_2)$ $(t_2 > t_1)$ модуль четырехугольника, лежащего в S_0, с границей, состоящей из кривых $\Gamma_{t_1}\{y = 1\}$, $\Gamma_{t_2}\{y = 0\}$, $m_1(t) = \min\limits_{z\in\Gamma_t} x$, $m_2(t) = \max\limits_{z\in\Gamma_t} x$, $\omega(t) = m_2(t) - m_1(t)$.

Тогда, если для некоторой монотонно возрастающей непрерывной положительной функции $F(t)$ имеет место неравенство

$$|M(t_1, t_2) - (F(t_2) - F(t_1))| \leqslant h(t_1) \xrightarrow[t_1 \to \infty]{} 0,$$

то $\omega(t_1) \to 0$ и

$$\lim_{t \to \infty} (m_1(t) - F(t)) = \lim_{t \to \infty} (m_2(t) - F(t)) = A,$$

т. е.

$$\lim_{t \to \infty} (X(t) - F(t)) = A \quad (X(t) + iY(t) \in \Gamma_t).$$

Пусть в w-плоскости имеются три вложенные полуполосы $S_1 \subset S \subset S_2$, ограниченные соответственно кривыми, уравнения которых $v = \pm \varphi_1(u)$, $v = \varphi_\pm(u)$, $v = \pm \varphi_2(u)$, где $\varphi_1(u)$, $\varphi_\pm(u)$, $\varphi_2(u)$—непрерывные функции u. Пусть функции $z = f_1(w)$, $z = f_2(w)$ осуществляют однолистное конформное отображение полуполос S_1 и S_2 на прямолинейную полуполосу S_0. Четырехугольники, лежащие между прямыми $w = u_1$ и $w = u_2$ в полуполосах S_1, S, S_2, обозначим соответственно через Q_1, Q, Q_2 $(Q_1 \subset Q \subset Q_2)$, а их модули через $M_1(u_1, u_2)$, $M(u_1, u_2)$, $M_2(u_1, u_2)$. Очевидно, $M_2(u_1, u_2) \leqslant M(u_1, u_2) \leqslant \leqslant M_1(u_1, u_2)$. Пусть $F(u)$ — такая положительная монотонно возрастающая функция, что для S_1 и S_2 выполняются неравенства:

$$|M_1(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1))| \leqslant h_1(u_1) \xrightarrow[u_1 \to \infty]{} 0,$$

$$|M_2(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1))| \leqslant h_2(u_1) \xrightarrow[u_1 \to \infty]{} 0.$$

Тогда из неравенств

$$M_2(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1)) \leqslant M(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1)) \leqslant$$
$$\leqslant M_1(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1))$$

имеем

$$|M(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1))| \leqslant \max(h_1(u_1), h_2(u_1)) \xrightarrow[u_1 \to \infty]{} 0.$$

Отсюда, используя теорему о модулях, можем записать, что для действительной части функции $z = f(w)$, осуществляющей конформное отображение полуполосы S на S_0, имеет место асимптотическое равенство: $\mathrm{Re}\, f(w) = A + F(u) + o(1)$, где A — некоторая действительная постоянная, $o(1)$ стремится к нулю при $u \to \infty$.

Пусть теперь функции $\varphi_j(u)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям 1) —3). Выберем функцию $F(u)$ следующим образом: $F(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^u \dfrac{du}{\varphi_1(u)}$.

Тогда по теореме Варшавского [1, стр. 81, 82], которая имеет место в силу условий 1), 2) (при $j=1$): $M_1(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1)) \xrightarrow[u_1 \to \infty]{} 0$ ($M_1(u_1, u_2)$ — модуль четырехугольника $S_1 \cap \{u_1 \leqslant u \leqslant u_2\}$).

Далее, по той же теореме Варшавского, которая имеет место в силу условий 1), 2) (при $j = 2$), для $M_2(u_1, u_2)$ ($M_2(u_1, u_2)$ — модуль четырехугольника $S_2 \cap \{u_1 \leqslant u \leqslant u_2\}$) имеем

$$M_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\varphi_2(u)} + h_1(u_1, u_2),$$

где $|h_1(u_1, u_2)| \leqslant h_1(u_1)$ и $\lim\limits_{u_1 \to \infty} h_1(u_1) = 0$. Поэтому

$$|M_2(u_1, u_2) - (F(u_2) - F(u_1))| \leqslant \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\varphi_2(u) - \varphi_1(u)}{\varphi_1(u)\, \varphi_2(u)}\, du + h_1(u_1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{u_1}^{\infty}\frac{\varphi_2(u)-\varphi_1(u)}{\varphi_1(u)\,\varphi_2(u)}\,du + h_1(u_1) = h_2(u_1)\xrightarrow[u_1\to\infty]{} 0$$

в силу условия 3). Следовательно,

$$\operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} Z(w) = \lambda + \frac{1}{2}\int\limits_0^u \frac{du}{\varphi_1(u)} + o(1).$$

Перейдем ко второй части доказательства. Докажем сначала лемму.

Л е м м а. *Пусть функция* $u(\omega)$ *гармоническая в* $\operatorname{Re}\omega > 0$, *ограниченная и непрерывная в* $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$, *кроме точки* $\omega = 0$, *причем при* $\omega \to 0$ *вдоль мнимой оси* $u(\omega) \to 0$. *Тогда* $u(\omega) \to 0$ *при* $\omega \to 0$ *в* $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(\omega)$ ограничена числом $M > 0$. Так как при $\omega \to 0$ вдоль мнимой оси $u(\omega) \to 0$, то для произвольного ε, $0 < \varepsilon < M$, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что на отрезке мнимой оси $[-i\delta, i\delta]$ $|u(\omega)| < \varepsilon$. Для $u(\omega)$ имеет место оценка сверху: $u(\omega) \leqslant -(M - \varepsilon)\dfrac{\varphi(\omega)}{\pi} + M$, где $\varphi(\omega)$ — угол, под которым виден отрезок $[-i\delta, i\delta]$ из точки ω. В самом деле, при подходе внутри области к точкам границы $(-i\delta, i\delta)$ $u(\omega) \leqslant \varepsilon$, а при подходе к точкам границы $(-i\infty, -i\delta)$, $(i\delta, i\infty)$ $u(\omega) \leqslant M$. Оценим функцию $\varphi(\omega)$ вблизи точки $\omega = 0$. Окружим точку $\omega = 0$ полукругом, содержащимся в $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$, с центром в точке $\omega = 0$ и радиусом, равным δ_1 $(\delta_1 < \delta)$. Наименьшее значение, которое равно $\pi - 2\operatorname{arctg}\delta_1/\delta$, в этом полукруге $\varphi(\omega)$ принимает в точке $\omega = \delta_1$. Значит,

$$u(\omega) \leqslant -(M-\varepsilon)\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{\delta}\right) + M,$$

или

$$u(\omega) \leqslant \varepsilon + \frac{2(M-\varepsilon)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{\delta}.$$

Взяв $\delta_1 < \delta \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon\pi}{2(M-\varepsilon)}$, имеем

$$\frac{2}{\pi}(M-\varepsilon)\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{\delta} < \varepsilon, \quad u(\omega) \leqslant 2\varepsilon.$$

Проведя такие же рассуждения для функции $-u(\omega)$, получаем оценку снизу: $u(\omega) \geqslant -2\varepsilon$.

Отобразив конформно полуплоскость $\operatorname{Re}\omega > 0$ на полуполосу $\{z = x + iy \mid x > 0;\ 0 < y < 1\}$ при помощи функции $z = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arch}\dfrac{i}{\omega}$, вследствие чего точка $\omega = 0$ перейдет в точку $z = \infty$, получаем такое утверждение.

Пусть $\Phi(z)$ — гармоническая в полуполосе $S_0 = \{z = x + iy \mid x > 0;\ 0 < y < 1\}$ функция, ограниченная и непрерывная в $\overline{S}_0$, кроме точки $z = \infty$, причем вдоль прямых $y = 0$ и $y = 1$ она стремится к нулю при $z \to \infty$. Тогда в $\overline{S}_0$ $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi(z) = 0$.

Пусть теперь функции $f_1(w)$, $f(w)$, $f_2(w)$ отображают конформно полуполосы S_1, S, S_2 на полуполосу S_0 z-плоскости так, что точке $w = \infty$ соответствует точка $z = \infty$. Для функций $z = f_j(w)$, $j = 1, 2$, в силу теоремы Варшавского [1, стр. 81, 82], требования которой выполняются вследствие условий 1), 2), можно записать асимптотические формулы

$$f_j(w) = \lambda_j + \frac{1}{2}\int\limits_0^u \frac{du}{\varphi_j(u)} + \frac{i}{2}\left(\frac{v}{\varphi_j(u)} + 1\right) + o(1),$$

где λ_j — действительные постоянные, $o(1)$ стремятся к нулю при $u \to \infty$. При отображении $\zeta = f_2(w)$ полуполоса S_2 перейдет в полуполосу $S_0(\zeta) = \{\zeta = \xi + i\eta \mid \xi > 0;\ 0 < \eta < 1\}$, а полуполосы S и S_1 — в $S(\zeta)$ и $S_1(\zeta)$, $S_1(\zeta) \subset S(\zeta) \subset S_0(\zeta)$. Полуполосы $S\ (\zeta)$ и $S_1\ (\zeta)$ ограничены соответственно кривыми $\eta = \psi_\pm(\xi)$ и $\eta = \pm\psi_1(\xi)$, причем имеет место

$$\psi_\pm(\xi(u, v)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varphi_\pm(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1) \text{ и } \psi_1(\xi(u, v)) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1),$$

где $\xi(u, v) = \operatorname{Re} f_2(w)$. Обозначим через $f_1^*(\zeta)$, $f^*(\zeta)$, $f_2^*(\zeta)$ функции, отображающие $S_1(\zeta)$, $S(\zeta)$, $S_0(\zeta)$ на полуполосу S_0 z-плоскости ($f_2^*(\zeta) = \zeta = f_2(w)$), а $g_1(z)$, $g(z)$, $g_2(z)$ — обратные функции. Рассмотрим функции

$$\Phi_1(z) = y - \operatorname{Im} g_1(z), \text{ где } y = \operatorname{Im} f_1^*(\zeta),$$

и

$$\Phi_2(z) = y - \operatorname{Im} g(z), \text{ где } y = \operatorname{Im} f^*(\zeta).$$

Обе они гармонические в S_0, ограниченные и непрерывные в $\overline{S}_0$, причем на прямой $y = 1$

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(z(w)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1)$$

и

$$\Phi_2(z) = \Phi_2(z(w)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_+(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1),$$

а на прямой $y = 0$

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(z(w)) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1),$$

$$\Phi_2(z) = \Phi_2(z(w)) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_-(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1).$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{z \in \{y=1\}, \{y=0\} \\ z \to \infty}} \Phi_1(z) = \lim_{u \to \infty}\left[\pm\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1)\right] = 0$$

и

$$\lim_{\substack{z \in \{y=1\}, \{y=0\} \\ z \to \infty}} \Phi_2(z) = \lim_{u \to \infty}\left[\pm\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi_\pm(u)}{\varphi_2(u)}\right) + o(1)\right] = 0$$

в силу условия 4). Поэтому в S

$$\lim_{w \to \infty}\{\operatorname{Im} f_1(w) - \operatorname{Im} f(w)\} = \lim_{w \to \infty}\{\operatorname{Im} f_1^*(f_2(w)) - \operatorname{Im} f^*(f_2(w))\} =$$

$$= \lim_{z \to \infty}\{\operatorname{Im} g(z) - \operatorname{Im} g_1(z)\} = 0.$$

В заключение автор искренне благодарит А. А. Гольдберга за внимание и полезные советы при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Е. Варшавский, Конформное отображение бесконечных полос, Математика (сб. переводов), т. 2, № 4, 1958.
2. Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 15.VI 1972 г.
Львовский политехнический институт