УДК 513.813:513.873

Пример риманова многообразия, диффеоморфного евклидовому пространству, шары фиксированного радиуса которого имеют неравномерно ограниченные объемы

А. А. Чумак

Рассмотрим на прямом произведении полного C^∞-многообразия $M = M^m$ [1, стр. 60—74] размерности m на $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ функцию $V_m(p, r) = V_r(p)$, $(p, r) \in M \times \mathbf{R}_+$, где $V_r(p)$ — объем (см [2, стр. 404—407]) на M шара $B_r(p)$ радиуса r с центром в точке $p \in M$. Как отмечалось в [3], функция $V_m(p, r)$ определена и непрерывна на $M \times \mathbf{R}_+$. Для $M = \mathbf{R}^m$ (m-мерное евклидово пространство) функция $V_m(p, r)$ постоянна по p для каждого фиксированного $r \in \mathbf{R}_+$. Это же верно в случае любого одномерного многообразия, так как для него понятия объема и длины совпадают.

В статье доказана следующая основная теорема, которая показывает, что в общем случае функция $V_m(p, r)$ может иметь любой рост по p.

Теорема 1. *Пусть $a(k)$ — возрастающая функция от натурального аргумента k. Тогда существует такое полное m-мерное C^∞-риманово многообразие M, диффеоморфное $\mathbf{R}^m$, и такая последовательность точек $\{p_k\}$, что*

$$d(p_0, p_k) = k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} a^{-1}(k) V_m(p_k, r) = +\infty \tag{2}$$

для каждого фиксированного $r \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. Здесь $d(p, q)$—риманово расстояние на M между точками p и q (определение см. в [1, стр. 63]).

Кроме того, в статье рассмотрен также вопрос о росте $V_m(p, r)$ по r. Поскольку M некомпактно, то ясно, что $V_m(p, r)$ может расти при возрастании радиуса. Конструкция, по которой доказывается теорема 1, позволяет установить, что этот рост может быть любым. Это утверждение точно формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $b(r)$ — положительная монотонно возрастающая функция от $r \in \mathbf{R}_+$. Тогда существуют полное m-мерное C^∞-риманово многообразие M, диффеоморфное $\mathbf{R}^m$, и такая фиксированная точка p в M, что*

$$\lim_{r\to\infty} b^{-1}(r) V_m(p, r) = +\infty. \tag{3}$$

Диффеоморфность многообразия M пространству $\mathbf{R}^m$ эквивалентна существованию на $\mathbf{R}^m$ метрической формы

$$L(x, \xi) = \sum_{i,k=1}^{m} g_{ik}(x)\xi_i\xi_k,\ x, \xi \in \mathbf{R}^m,\ g_{jk}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^m),\ i, k = 1, 2, \ldots, m,$$

такой, что M можно отождествить с $(\mathbf{R}^m, \| g_{jk}(x) \|)$ — пространством $\mathbf{R}^m$ с метрикой, задаваемой метрическим тензором $\| g_{jk}(x) \|$.

Многообразия в теоремах 1 и 2 будут строиться как некоторые поверхности $z = f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ в $\mathbf{R}^{m+1}$. Метрика на $\mathbf{R}^m$ при этом будет задаваться функциями

$$g_{jk}(x) = \delta_{jk} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k},\ j, k = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Полнота таких многообразий очевидна в силу наличия оценки $L(x, \xi) \geqslant \geqslant |\xi|^2$.

Доказательства теорем 1 и 2 основываются на следующей лемме.

Лемма. *Пусть c, ε — положительные числа. Тогда существует функция $f_{c,\varepsilon}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ $(m \geqslant 2)$ такая, что*

а) $f_{c,\varepsilon}(x) = 0$ *вне множества* $\{x \in \mathbf{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$;

б) *на многообразии* $(\mathbf{R}^m, \| g_{jk}(x) \|)$ *с метрикой, определяемой по формуле* (4), *для шаров на* $(\mathbf{R}^m, \| g_{jk}(x) \|)$ *с центром в начале координат имеем*

$$V_m(0, r) \geqslant cr^m - \varepsilon, \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}; \tag{5}$$

в) *риманово расстояние на* $(\mathbf{R}^m, \| g_{jk}(x) \|)$ *вдоль оси* Ox_1 *совпадает с обычным расстоянием на* $\mathbf{R}^m$ *вдоль этой оси.*

Доказательство. Докажем сначала лемму при $m = 2$. При этом будем обозначать временно x_1 и x_2 соответственно через x и y. Рассмотрим в $\mathbf{R}^2$ полярные координаты и введем функцию $f_n(x, y) = \rho \sin n\varphi \in \in C^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Поверхность $\sigma : z = = f_n(x, y)$ в $\mathbf{R}^3$ есть коническая поверхность с вершиной в начале координат. Поэтому площадь $S_{R,n}$ части

$$\sigma_R = \sigma \cap Ш_R \quad (Ш_R = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\})$$

этой поверхности будет определяться по формуле $S_{R,n} = \dfrac{1}{2} R L_{R,n}$, где $L_{R,n}$ — длина линии пересечения конической поверхности σ с поверхностью шара $Ш_R$, которая имеет параметрический вид

$$x = U(\varphi) \cos \varphi, \quad y = U(\varphi) \sin \varphi, \quad z = U(\varphi) \sin n\varphi,$$

где $U(\varphi) = R \cdot (1 + \sin^2 n\varphi)^{-\frac{1}{2}}$.

Следовательно,

$$L_{R,n} = \int_0^{2\pi} (x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times (1 + \sin^2 \alpha)^{-1} d\alpha > 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha)^{-1} d\alpha = 2n\pi R.$$

Благодаря этому ($s_n = (2R)^{-1} L_{R,n}$ зависит только от n)

$$S_{R,n} = s_n R^2 > n\pi R^2. \tag{6}$$

Так как ниже рассматриваются поверхности в $\mathbf{R}^3$, которые гомеоморфны $\mathbf{R}^2$ и которые задаются с помощью непрерывных функций $z = f(x, y)$, то будем отождествлять локальные координаты на этих поверхностях с переменными (x, y), а локальную карту на этих поверхностях с $\mathbf{R}^2$. Условимся также точки этих поверхностей характеризовать парой (x, y), так как в $\mathbf{R}^3$ ей отвечает единственная точка $(x, y, f(x, y))$ поверхности $z = f(x, y)$. В случае двух поверхностей $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ точки на них обозначаем через $(x, y)_f$ и $(x, y)_g$.

Введем вспомогательную функцию $\varphi(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$, где $\varphi(r) \in \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$, равна нулю при $0 \leqslant r \leqslant 1$, единице при $r \geqslant 2$ и монотонно возрастает при $r \in (0, 1)$.

Рассмотрим поверхность $\omega : z = g_n(x, y) = \varphi(x, y) \cdot f_n(x, y)$. Понятно, что $g_n(x, y) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ и что функция $d_\omega(x, y)$ (расстояние на ω между точками

$(x, y)_\omega$ и началом координат $(0, 0)_\omega$) непрерывна и достигает на компакте $Q=\{(x, y) \mid \varphi(x, y) \neq 1\}$ своего наибольшего значения $a = \sup\limits_{(x,y)\in Q} d_\omega(x, y)$.

Пусть ω_r — шар на ω радиуса r с центром в начале координат, $V = \omega\setminus\omega_a \subset \omega \cap \sigma \subset \mathbf{R}^3$, $b = \inf\{r > 0 \mid \sigma_r \cap V \neq \varnothing\} = \sup\{r > 0 \mid \sigma_r \cap V = \varnothing\}$, $c = \inf\{r > 0 \mid \sigma_r \cap (\sigma\setminus V) = \sigma\setminus V\}$. Другими словами σ_b — шар на σ, наибольший из всех шаров, лежащих в $\sigma\setminus V$, а σ_c — шар на σ, наименьший из всех шаров, содержащих в себе множество $\sigma\setminus V$. Ясно, что $b \leqslant c$.

Так как расстояние $d_\sigma(x, y)$ между точками $(0, 0)_\sigma$ и $(x, y)_\sigma$ совпадает (благодаря тому, что σ — коническая поверхность) с обычным расстоянием $d(x, y, f_n(x, y))$ в $\mathbf{R}^3$ между точками $(0, 0, 0)$ и $(x, y, f_n(x, y))$ и так как d — кратчайшее расстояние между точками в $\mathbf{R}^3$, то

$$d_\sigma(x, y) = d(x, y, f_n(x, y)) \leqslant d_\omega(x, y),\ (x, y) \in Q. \tag{7}$$

Отсюда $c \leqslant a$, а так как $f_n(x, y) = 0$ и $d_\sigma(x, y) = d_\omega(x, y)$ вдоль лучей $\varphi = \dfrac{k\pi}{n}$ (k — целое), то $c = a$. Как следствие получаем, что $b \leqslant a$. Далее, благодаря (7), при $r \geqslant a$ имеем $\omega_r\setminus\omega_a \subseteq \sigma_r\setminus\sigma_b \subseteq \sigma$ и, следовательно, $\omega_r\setminus\omega_a$ является куском развертывающейся поверхности. Поэтому после развертки $\sigma_r\setminus\sigma_b$ на двумерную плоскость получаем кольцо с внутренней окружностью $\widetilde{\partial\sigma_b}$ и внешней окружностью $\widetilde{\partial\sigma_r}$ (через $\widetilde{A}$ обозначаем образ множества A при этой развертке). При этом площади множеств $A \subset \sigma_r\setminus\sigma_b$ будут равны площадям образов $\widetilde{A}$ при этой развертке, а геодезические на σ переходят в прямые с сохранением длин.

Возьмем произвольную точку $N \in \sigma_r\setminus\sigma_a$. Легко видеть, что расстояния ρ от точки $\widetilde{N}$ до множеств $\widetilde{\partial\sigma}_{a+t}$, $\widetilde{\partial\omega}_{a+t}$ и $\widetilde{\partial\sigma}_{b+t}$ удовлетворяют неравенствам

$$\rho(\widetilde{N}, \widetilde{\partial\sigma}_{a+t}) \leqslant \rho(\widetilde{N}, \widetilde{\partial\omega}_{a+t}) \leqslant \rho(\widetilde{N}, \widetilde{\partial\sigma}_{b+t}),$$

где $0 \leqslant t \leqslant \rho(\widetilde{N}, \widetilde{\partial\sigma}_a)$. Отсюда

$$\omega_r\setminus\omega_a \supseteq \sigma_{r-(a-b)}\setminus\sigma_a \quad (r \geqslant a). \tag{8}$$

Если через $W_{r,n}$ обозначить площадь на ω шара ω_r, то из (8), переходя к площадям, получаем

$$W_{r,n} \geqslant W_{a,n} + S_{r-(a-b),n} - S_{a,n} \quad (r \geqslant a). \tag{9}$$

Из (9), используя (6), находим, что

$$W_{r,n} \geqslant s_n r^2 + W_{a,r} + s_n\,[(b^2 + 2rb) - 2a(b + r)] \geqslant s_n r^2 - 2as_n(b + r)\ \ (r \geqslant a).$$

Из последнего неравенства получаем (так как $r \geqslant a \geqslant b$), что

$$W_{r,n} \geqslant s_n r^2 - 4ras_n \quad (r \geqslant a). \tag{10}$$

Произведем теперь в $\mathbf{R}^3$ гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии $\delta > 0$. При этом поверхность σ переходит сама в себя, а поверхность ω переходит в новую поверхность:

$$\omega^{(\delta)}: z = g_n^{(\delta)}(x, y) = \varphi(\delta^{-1}\sqrt{x^2 + y^2})\, f_n(x, y) \in C^\infty(\mathbf{R}^2).$$

Как хорошо известно, при гомотетии площади увеличиваются в δ^2 раз, а длины кривых в δ раз. Для поверхности $\omega^{(\delta)}$ точно так же, как это делалось для поверхности ω, можно доказать неравенство, аналогичное неравенству (7). Пусть $W_{r,n}^{(\delta)}$ и $S_r^{(\delta)}$ обозначают площади кругов на соответствующих поверхностях. Так как $S_{r,n}^{(\delta)} = S_{r,n}$ и при гомотетии число a (как длина некоторой кривой на $\omega^{(\delta)}$) увеличивается в δ раз, то

$$W_{r,n}^{(\delta)} \geqslant s_n r^2 - 4ras_n\delta \quad (r \geqslant \delta a).$$

Отсюда видно, что всегда можно по заданному $c > 0$ подобрать настолько большое натуральное n, чтобы выполнялось неравенство $s_n > c$ и при этом фиксированном значении n по заданному $\varepsilon > 0$ провести гомотетию с настолько малым $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, чтобы выполнялись неравенства $\delta a \leqslant \varepsilon$ и

$$W_{r,n}^{(\delta)} \geqslant s_n r^2 - \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Но тогда, при так выбранных n и δ, условиям леммы 1 удовлетворяет функция

$$f_{c,\varepsilon}(x, y) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})\, g_n^{(\delta)}(x, y) \in C^\infty(\mathbf{R}^2). \tag{12}$$

где $\psi(r) \in C^\infty(\mathbf{R})$, равна единице при $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, нулю при $r \geqslant \frac{2}{3}$ и монотонно убывает при $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{2}{3}$. Лемма при $m = 2$ доказана. При этом $V_2(0, r) = W_{r,n}^{(\delta)}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Положим

$$f_{c,\varepsilon}(x) = f_{c',\varepsilon'}(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_m),$$

где c', ε' будут подобраны ниже. Многообразие M^m при этом является прямым произведением $M^2 = (\mathbf{R}^2, \| g_{jk}(x) \|)$ с метрикой, определяемой функцией (12), на $\mathbf{R}^{m-2}$. Так как (см. [3, § 3, 4])

$$d_{M^m}^2(x, y) = d_{M^2}^2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + \sum_{j=3}^{m} (x_j - y_j)^2,$$

то при $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ получаем ($dx = dx_2 \ldots dx_m$)

$$V_m(0, r) = \int\limits_{x_2^2+\ldots+x_m^2 \leqslant r^2} V_2(0, \sqrt{r^2 - (x_2^2 + \ldots + x_m^2)})\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{x_2^2+\ldots+x_m^2 \leqslant r^2} [c'(r^2 - (x_2^2 + \ldots + x_m^2)) - \varepsilon']\, dx = \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}} c'}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} r^m -$$

$$- \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}} \varepsilon'}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} r^{m-2} \geqslant \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}} c'}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} r^m - \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}} \varepsilon'}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \geqslant c r^m - \varepsilon$$

при $c' \geqslant \dfrac{c\,\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}{\pi^{\frac{m-2}{2}}}$, $0 < \varepsilon' < \dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\varepsilon}{\pi^{\frac{m-2}{2}}}$.

Выберем теперь c' и ε' так, чтобы удовлетворить эти неравенства. Тем самым (5) установлено. Все остальные условия леммы легко проверяются. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Введем на $\mathbf{R}^m$ метрику функцией

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ka(k),\varepsilon}(x_1 - k, x_2, \ldots, x_m). \tag{13}$$

В каждой фиксированной точке ряд (13) отличен от нуля не более чем в одном члене. Поэтому $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$. На таком многообразии M^m расстояние вдоль оси Ox_1 совпадает с расстоянием в $\mathbf{R}^m$. Пусть p_k — точки на M^m, соответствующие точкам $(k, 0, 0, \ldots, 0)$ на $\mathbf{R}^m$. Тогда выполняется (1) и

$$V_m(p_k, r) \geqslant V_m\left(p_k, \frac{1}{2}\min(r, r^{-1})\right) \geqslant ka(k)\left[\frac{1}{2}\min(r, r^{-1})\right]^m - \varepsilon,$$

что доказывает (2) и, следовательно, теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Введем на $\mathbf{R}^m$ метрику функцией (13) с $a(k) = \sum_{n=1}^{k+2} b(n)$. Тогда для любого r, если взять $k = ([r] - 1)$, получаем, благодаря монотонности функции $b(r)$,

$$V_m(p_0, r) \geqslant V_m\left(p_k, \frac{1}{2}\right) \geqslant ka(k)\frac{1}{2^m} - \varepsilon \geqslant kb(k+2)\frac{1}{2^m} - \varepsilon =$$

$$= ([r] - 1)\, b([r] + 1)\frac{1}{2^m} - \varepsilon \geqslant \frac{1}{2^m} b(r)([r] - 1) - \varepsilon$$

и (3) выполняется с $p = p_0$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Интересно отметить, что существуют полные связные многообразия, для которых не всегда

$$T = \inf_{p \in M, r \in \mathbf{R}_+} r^{-m} V_m(p, r) > 0.$$

Например, в $\mathbf{R}^m$ таковой является поверхность

$$\{(x_1, x_2, \ldots x_m) \mid x_1^2(x_2^2 + \ldots x_m^2) = 1,\ x_1 > 0\}$$

с индуцированной метрикой.

В заключение автор выражает благодарность Д. В. Алексеевскому за высказанные по построенному примеру замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», М., 1964.
2. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, «Наука», М., 1964.
3. А. А. Чумак, Самосопряженность оператора Бельтрами—Лапласа на полном паракомпактном римановом многообразии без края, УМЖ, т. 25, № 6, 1973.

Поступила 2.XI 1972 г.,
после переработки — 18.I 1974 г.
НИИАСС Госстроя УССР