УДК 517.919

Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных

Ю. Д. Шлапак

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$P(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор неизвестных, $P(t)$ и $A(t)$ — n-мерные матрицы, элементы которых имеют непрерывные производные всех порядков по t для $-\infty < t < \infty$ и являются периодическими по t периода 1.

Исследуется задача приведения системы (1) с помощью периодической невырожденной замены переменных к системе

$$P_0\frac{dy}{dt} = A_0(t)y, \tag{2}$$

где P_0 — постоянная матрица, $A_0(t)$ — периодическая периода 1. Полученные результаты применяются затем для исследования вопроса о периодических решениях систем вида (1).

1. Определение. Будем говорить, что матрица имеет неизменную структуру на Δ (Δ — открытый промежуток вещественной прямой R), если при всех $t \in \Delta$ она сохраняет нормальную форму Жордана, т. е. имеет в каждой точке интервала Δ одну и ту же характеристику Сегре [1, 2].

Теорема 1. *Для всякой n-мерной матрицы $A(t)$, имеющей неизменную структуру на R, элементы которой имеют непрерывные производные всех порядков по t на R и являются периодическими по t периода 1, су-*

ществует матрица $S(t)$, элементы которой имеют непрерывные производные всех порядков по t на R и являются периодическими по t периода 1, *приводящая матрицу $A(t)$ к нормальной форме Жордана*:

$$A(t)=S(t)\,J(t)\,S^{-1}(t). \tag{3}$$

Определение. Пусть $\lambda_j=\lambda_j(t)$ есть некоторое собственное значение матрицы $B(t)$ кратности s и пусть ему соответствуют элементарные делители

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_1},\ (\lambda-\lambda_j)^{k_2},\ \ldots,(\lambda-\lambda_j)^{k_m}. \tag{4}$$

Тогда если целочисленные функции $s,\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$ принимают постоянное значение при всех $t\in\Delta$, то будем говорить, что матрица $B(t)$ имеет неизменную структуру на Δ относительно собственного значения λ_j.

Опираясь на теорему 1 и теорему 3 работы [3], можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть система дифференциальных уравнений* (1) *такова, что матрица при производных $P(t)$ имеет неизменную структуру на R относительно нулевого собственного значения кратности k.*

Тогда существует невырожденная замена переменных

$$x=L(t)\,y \tag{5}$$

с периодической периода 1 *n-мерной матрицей $L(t)$, элементы которой имеют непрерывные производные всех порядков по t на R, приводящая систему* (1) *к виду* (2), *где P_0 — постоянная матрица вида*

$$P_0=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}, \tag{6}$$

E — $(n-k)$-мерная единичная матрица, J — k-мерная матрица вида

$$J=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_1 & 0\ldots 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & 0\ldots 0 & \varepsilon_{k-1}\\ 0 & 0 & 0\ldots 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{7}$$

где либо $\varepsilon_j=0$ для всех $t\in R$, либо $\varepsilon_j=1$ для всех $t\in R$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$, $A_0(t)$ — n-мерная периодическая периода 1 *матрица, элементы которой имеют непрерывные производные всех порядков по t на R.*

Замечание 1. Если матрица $P(t)$ действительна, матрица $A(t)$ и ее нормальная форма Жордана действительны, то существует замена (5) с действительной матрицей $L(t)$ с теми же свойствами, элементы которой периодические периода 2, приводящая (1) к виду (2) с действительной матрицей $A_0(t)$, обладающей теми же свойствами и являющейся периодической периода 2.

Замечание 2. Если элементы матрицы $P(t)$ l раз, а элементы матрицы $A(t)$ m раз непрерывно дифференцируемые функции t, то элементы матрицы $A_0(t)$ s раз непрерывно дифференцируемые функции t, где $s=\min[m,\ l-1]$.

2. Пусть система уравнений (1) удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда существует периодическая замена переменных, приводящая (1) к виду (2). Таким образом, вопрос о периодических решениях системы (1) сводится к вопросу о периодических решениях системы (2).

В силу структуры матрицы P_0 система (2) может быть записана в виде

$$\frac{dy^1}{dt} = \mathfrak{L}(t)\, y, \tag{8}$$

$$0 = Q(t)\, y, \tag{9}$$

где для удобства обозначений произведена перенумерация неизвестных, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-s}, y_{n-s+1}, \ldots, y_n)$, $y^1 = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-s})$; периодические периода 1 матрицы $\mathfrak{L}(t)$ и $Q(t)$ соответственно размерностей $(n-s)\times n$ и $s\times n$; s — количество элементарных делителей матрицы J.

Обозначим $y^2 = (y_{n-s+1}, \ldots, y_n)$. Тогда, если в уравнениях (9) $s\times s$-матрица при неизвестных $y_{n-s+1}, \ldots, y_n$ такова, что ее определитель отличен от нуля при всех $t \in R$, то уравнения (9) разрешимы относительно y^2, и мы получаем

$$y^2 = \Pi(t)\, y^1, \tag{10}$$

где $\Pi(t)$ — $s\times(n-s)$-матрица.

Подставляя (10) в (8), имеем

$$\frac{dy^1}{dt} = F(t)\, y^1, \tag{11}$$

т. е. вопрос о периодических решениях системы (1) сводится к вопросу о периодических решениях системы (11). Для последней же этот вопрос изучен достаточно хорошо (см., например, [4]).

Если же определитель s-мерной матрицы при неизвестных $y_{n-s+1}, \ldots$ $\ldots, y_n$ обращается в нуль, то предположим тогда, что ранг матрицы $Q(t)$ равен s при всех $t \in R$. Тогда в силу теоремы о периодических решениях системы линейных алгебраических уравнений с периодическими коэффициентами [5] система (9) имеет $n - s$ линейно независимых при всех $t \in R$ решений, периодических периода 1 и имеющих непрерывные производные всех порядков по t для всех $t \in R$:

$$y^{(1)}(t), \quad y^{(2)}(t), \ldots, y^{(n-s)}(t), \tag{12}$$

при этом общее решение системы (9) имеет вид

$$y = z_1 y^{(1)}(t) + z_2 y^{(2)}(t) + \ldots + z_{n-s} y^{(n-s)}(t), \tag{13}$$

где $z_i = z_i(t)$ — произвольные скалярные функции; $i = 1, 2, \ldots, n-s$.

Подставим выражение (13) в систему (8). Получим

$$P_1(t)\frac{dz}{dt} = A_1(t)\, z, \tag{14}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-s})$.

И если система (14) имеет периодическое решение $z^0(t) = \{z_1^0(t), \ldots$ $\ldots, z_{n-s}^0(t)\}$, то, подставляя его в (13), получаем периодическое решение системы (8), (9).

Итак, задача о периодических решениях системы n-го порядка вида (1) свелась к задаче о периодических решениях системы того же вида, однако порядка $n - s$, где число s равно количеству элементарных делителей, отвечающих нулевому собственному значению матрицы $P(t)$.

Если окажется, что определитель матрицы $P_1(t)$ отличен от нуля при всех $t \in R$, то система (14) приводится к системе вида (11). Если же определитель $P_1(t)$ обращается в нуль, то накладываем на систему (14) условия теоремы 2, приводим (14) к системе вида (2), которую затем записываем в виде (8), (9), повторяем только что приведенные рассуждения и т. д.

В результате на каком-то m-м шаге ($m \leqslant n - 1$) придем либо к системе, разрешенной относительно производных, либо к одному дифференциальному уравнению

$$a(t)\frac{dw}{dt} = b(t)\,w, \tag{15}$$

для которого существование периодического решения устанавливается непосредственно.

Если система (1) состоит из двух уравнений и удовлетворяет условиям теоремы 2, то задача о периодических решениях полностью разрешима.

Автор благодарит А. М. Самойленко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Богданов, Г. Н. Чеботарев, О матрицах, коммутирующих со своей производной, Изв. вузов, Математика, № 4, 1959.
2. Ю. С. Богданов, О преобразовании переменной матрицы к каноническому виду, ДАН БССР, т. 7, № 3, 1963.
3. Y. Sibuya, Some Global Properties of Matrices of Functions of One Variable, Math. Ann., Bd. 161, Hf. 1, 1965.
4. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.
5. А. М. Самойленко, Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Сб. Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений, Изд. Института математики АН УССР, К., 1974.
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Изд. 3-е, Физматгиз, М., 1963.
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Метод ускоренной сходимости в нелинейной махานике, «Наукова думка», К., 1969.

Поступила 15.IV 1974 г.
Киевский государственный университет