УДК 517.948

Об усреднении в некоторых системах интегро-дифференциальных уравнений

Х. Эшматов

Исследование динамических задач теории вязко-упругости [1, 2], приводит к изучению стандартных систем интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = \varepsilon X\left(t,\ x,\ \int_0^t \varphi_1(s_1, x(t-s_1))\, ds_1, \ldots, \int_0^t \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^t \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, x(t-s_1), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, x(t-s_n))\, ds_1 \ldots ds_n \right). \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр; X и φ_i, $i = \overline{1, n}$ — вектор-функции.

Схемы усреднения, развитые и обоснованные в [3—10] для интегро-дифференциальных уравнений стандартного вида, могут быть распространены и на интегро-дифференциальные уравнения вида (1). Для исследования системы (1) применим схему усреднения, приводящую ее к системе дифференциальных уравнений [5—8].

Рассматривая вектор x, входящий в X и φ_i, как параметр, вычислим интегралы

$$\int_0^\infty \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\infty \varphi_i(s_1, \ldots, s_i, x, \ldots, x)\, ds_1 \ldots ds_i = \psi_i(x), \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Пусть существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))\, dt = X_0(x). \qquad (3)$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие усредненную систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon X_0(\xi). \qquad (4)$$

Отметим, что исследовать систему усредненных уравнений (4) во многих случаях гораздо проще, чем исходную систему (1).

Сформулируем условия, обеспечивающие близость решений систем (1) и (4).

Теорема 1. *Пусть функции* $X(t, x, y_1, \ldots, y_n)$ *и* $\varphi_i(s_1, \ldots, s_i, u_1, \ldots, u_i)$ *определены и непрерывны в области*

$$Q\{t \geqslant 0,\ s_i \geqslant 0,\ x \in D,\ u_i \in D,\ y_i \in E_m\}, \quad i = \overline{1, n},$$

и в этой области выполнены условия:

1) *вектор функция* X *удовлетворяет условию Липшица по* $x, y_1, \ldots, y_n$ *с постоянной* λ;

2) *вектор-функции* φ_i, $i = \overline{1, n}$, *удовлетворяют условию Липшица по* $u_1, \ldots, u_i$ *с функцией* $\mu_i(s_1, \ldots, s_i)$, *причем*

$$\int_0^t \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^t \mu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant M, \ \ i = \overline{1, n}$$

$$\int_0^t \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^t s_k \mu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant M, \ \ k = \overline{1, i};$$

3) *в каждой точке* $x \in D$ *существует предел* (3), *причем* $X_0(x)$ *в области* D *ограничена постоянной* M *и удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ;

4) *решение системы* (4), *удовлетворяющее начальному условию* $\xi(0) = x(0)$, *определено для всех* $t \geqslant 0$ *и лежит в области* D *с* ρ*-окрестностью;*

5) *вдоль траектории* $\xi(t)$

$$\int_0^t \alpha_i(\tau, \xi(\tau))\, d\tau \leqslant t p_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $p_i(t) \to 0$, $t \to \infty$,

$$\alpha_i(t, \xi(t)) = \left| \int_0^t \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^t \varphi_i(s_1, \ldots, s_i, \xi(t), \ldots, \xi(t))\, ds_1 \ldots ds_i - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\infty \varphi_i(s_1, \ldots, s_i, \xi(t), \ldots, \xi(t))\, ds_1 \ldots ds_i \right|;$$

6) *функции* $\psi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, *удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* β.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* ε_0, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство* $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, *где* $x(t)$ *и* $\xi(t)$ *соответственно решения систем* (1) *и* (4).

Доказательство. Для доказательства этой теоремы вычтем из (1) систему (4) и результат проинтегрируем от 0 до t. Учитывая одинаковые начальные условия, находим

$$z(t) = x(t) - \xi(t) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \tag{5}$$

где обозначено

$$J_1 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau,\ x(\tau),\ \int_0^\tau \varphi_1 (s_1, x(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, x(\tau - s_1), \ldots, x(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\tau \varphi_1 (s_1, \xi(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots, \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau - s_1), \ldots$$

$$\ldots, \xi(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg)\Bigg] d\tau,$$

$$J_2 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\tau \varphi_1 (s_1, \xi(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau - s_1), \ldots, \xi(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\tau \varphi_1 (s_1, \xi(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg)\Bigg] d\tau,$$

$$J_3 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\tau \varphi_1 (s_1, \xi(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\infty \varphi_1 (s_1, \xi(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\infty \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\infty \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg)\Bigg] d\tau,$$

$$J_4 = \varepsilon \int_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau,\ \xi(\tau),\ \int_0^\infty \varphi_1 (s_1, \xi(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int_0^\infty \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\infty \varphi_n (s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n\Bigg) - X_0(\xi(\tau))\Bigg] d\tau.$$

Замечая, что $|\xi(\tau) - \xi(\tau - s)| \leqslant \varepsilon M s$, и используя условия 1)—3), находим:

$$|J_1| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \Bigg\{ |z(\tau)| + \int_0^\tau \mu_1(s_1)\, |z(\tau - s_1)|\, ds_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int_0^\tau \mu_n (s_1, \ldots, s_n) [\, |z(\tau - s_1| + \ldots + |z(\tau - s_n)|\,]\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg\} d\tau, \quad (6)$$

$$|J_2| \leqslant \varepsilon^2\lambda M \int\limits_0^t \Bigg[\int\limits_0^\tau s_1\mu_1(s_1)\,ds_1 + \ldots + \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau (s_1 + \ldots + s_n) \times$$

$$\times \mu_n(s_1, \ldots, s_n)\,ds_n \ldots ds_n\Bigg] d\tau \leqslant \varepsilon\lambda M^2 \frac{n(n+1)}{2}, \tag{7}$$

$$|I_3| \leqslant \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \Bigg\{ \Bigg| \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, \xi(\tau))\,ds_1 - \int\limits_0^\infty \varphi_1(s_1, \xi(\tau))\,ds_1 \Bigg| + \ldots$$

$$\ldots + \Bigg| \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\,ds_1 \ldots ds_n -$$

$$- \int\limits_0^\infty \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\infty \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, \xi(\tau), \ldots, \xi(\tau))\,ds_1 \ldots ds_n \Bigg| \Bigg\} d\tau =$$

$$= \varepsilon\lambda \int\limits_0^t [\alpha_1(\tau, \xi(\tau)) + \ldots + \alpha_n(\tau, \xi(\tau))]\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lambda [p_{10}(\varepsilon) + \ldots + p_{n0}(\varepsilon)] = \lambda \sum_{i=1}^n p_{i0}(\varepsilon), \tag{8}$$

где

$$p_{i0}(\varepsilon) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} \tau p_i\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad p_{i0}(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В силу условий теоремы 1, как в [8], можно показать, что $|I_4|$ при достаточно малом ε на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет меньше наперед заданного числа $\delta(\varepsilon)$, т. е.

$$|I_4| < \delta(\varepsilon). \tag{9}$$

Тогда из (5)—(9) имеем

$$|z(t)| < \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \Bigg\{ |z(\tau)| + \int\limits_0^\tau \mu_1(s_1)\,|z(\tau - s_1)|\,ds_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \mu_n(s_1, \ldots, s_n)\,[\,|z(\tau - s_1)| + \ldots$$

$$\ldots + |z(\tau - s_n)|\,]\,ds_1 \ldots ds_n \Bigg\} d\tau + \varepsilon_1 = w(t),$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon\lambda L M^2 \dfrac{n(n+1)}{2} + \lambda \sum\limits_{i=1}^n p_{i0}(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)$, а правая часть последнего неравенства обозначена через $w(t)$. Имеем

$$\frac{w'(t)}{w(t)} < \varepsilon\lambda \left\{ 1 + \int\limits_0^t \mu_1(s_1)\,ds_1 + \ldots + n \int\limits_0^t \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^t \mu_n(s_1, \ldots, s_n)\,ds_1 \ldots ds_n \right\} \tag{10}$$

ибо $w(t) \geqslant w(s) > z(s)$ при $t \geqslant s$. Интегрируя неравенство (10) от 0 до t на отрезке $[0, L\varepsilon^{-1}]$, получаем оценку

$$|z(t)| = |x(t) - \xi(t)| < w(t) < \varepsilon_1 \exp(LN), \quad N = \lambda\left(1 + \frac{n(n+1)}{2} M\right).$$

Для доказательства теоремы остается только выбрать $\varepsilon_1 = \min(\rho, \eta)\exp(-LN)$.

Сформулируем еще одну теорему о близости решений систем (1) и (4).

Теорема 2. *Пусть в теореме 1 условие 2) заменено следующим: вектор-функции φ_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют условию Липшица по $u_1, \ldots, u_i$ с функцией $\nu_i(s_1, \ldots, s_i)$, причем*

$$\int_0^t d\tau \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{i} \nu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant tq_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\int_0^t d\tau \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{i} s_k \nu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant t^2 r_i(t), \quad k = \overline{1, i},$$

$$q_i(t) \to 0, \; r_i(t) \to 0, \; t \to \infty.$$

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $|x(t) - \xi(t)| < \eta$, где $x(t)$ и $\xi(t)$ соответственно решения систем (1) *и* (4).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

В случае, когда предел (3) не существует, то системе (1) можно поставить в соответствие систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = \varepsilon X\left(t, \; y(t), \; \int_0^\infty \varphi_1(s_1, y(t))\, ds_1, \ldots, \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n} \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(t), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, y(t))\, ds_1 \ldots ds_n \right), \tag{11}$$

решения которой достаточно хорошо аппроксимируют соответствующие решения системы (1).

Система (11) проще, чем исходная система (1). Во многих случаях она поддается точному интегрированию или может быть изучена качественно.

Теорема 3. *Пусть функции $X(t, x, y_1, \ldots, y_n)$ и $\varphi_i(s_1, \ldots, s_i, u_1, \ldots, u_i)$ $i = \overline{1, n}$, определены и непрерывны в области*

$$Q\{t \geqslant 0, \; s_i \geqslant 0, \; x, u_i \in D, \; y_i \in E_m\}, \; i = \overline{1, n},$$

и пусть в этой области выполнены условия:

1) *вектор-функция X ограничена постоянной M и удовлетворяет условию Липшица по $x, y_1, \ldots, y_n$ с постоянной λ;*

2) *вектор-функции φ_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют условию Липшица по $u_1, \ldots, u_i$ с функцией $\mu_i(s_1, \ldots, s_i)$,* причем

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i} \mu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant M, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i} s_k \mu_i(s_1, \ldots, s_i)\, ds_1 \ldots ds_i \leqslant M, \quad k = \overline{1, i};$$

3) *вдоль траектории $y(t)$*

$$\int_0^t \alpha_i(\tau, y(\tau))\, d\tau \leqslant tp_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $p_i(t) \to 0,\ t \to \infty$,

$$\alpha_i(t, y(t)) = \Bigg| \int\limits_0^t \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^t \varphi_i(s_1, \ldots, s_i, y(t), \ldots, y(t))\, ds_1 \ldots ds_i -$$

$$- \int\limits_0^\infty \overset{i}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\infty \varphi_i(s_1, \ldots, s_i, y(t), \ldots, y(t))\, ds_1 \ldots ds_i \Bigg|;$$

4) *решение системы* (11), *удовлетворяющее начальному условию* $y(0) = x(0)$, *определено для* $t \geqslant 0$ *и лежит в области* D *с* ρ-*окрестностью.*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* ε_0, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство* $|x(t) - y(t)| < \eta$, *где* $x(t)$ *и* $y(t)$ *соответственно решения систем* (1) *и* (11).

Доказательство. Представив системы (1) и (11) в виде интегральных уравнений, находим

$$x(t) - y(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau, x(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, x(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, x(\tau - s_1), \ldots, x(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau, y(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, y(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(\tau - s_1), \ldots, y(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) \Bigg] d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau, y(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, y(\tau - s_1))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(\tau - s_1), \ldots, y(\tau - s_n))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau, y(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, y(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(\tau), \ldots, y(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) \Bigg] d\tau +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^t \Bigg[X\Bigg(\tau, y(\tau), \int\limits_0^\tau \varphi_1(s_1, y(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\tau \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\tau \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(\tau), \ldots, y(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) -$$

$$- X\Bigg(\tau, y(\tau), \int\limits_0^\infty \varphi_1(s_1, y(\tau))\, ds_1, \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_0^\infty \overset{n}{\underset{0}{\cdots}} \int\limits_0^\infty \varphi_n(s_1, \ldots, s_n, y(\tau), \ldots, y(\tau))\, ds_1 \ldots ds_n \Bigg) \Bigg] d\tau.$$

Так же как и в теореме 1, нетрудно показать, что будет справедливо неравенство

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon_2 \exp(LN),$$

$$N = \lambda\left(1 + \frac{n(n+1)}{2} M\right), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon\lambda L M^2 \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} p_{i0}(\varepsilon),$$

$$p_{i0}(\varepsilon) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant L} p_i\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Для доказательства теоремы остается только выбрать

$$\varepsilon_2 = \min(\rho, \eta) \exp(-LN).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термо-вязко-упругости, «Наука», М., 1970.
2. Д. Л. Быков, А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов, Б. Е. Победря, Некоторые основные проблемы теории термо-вязко-упругости, Механика полимеров, № 1, 1971.
3. А. Н. Филатов, Усреднение в системах интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, Сб. Исследования по аналитической механике, «Фан», Ташкент, 1965.
4. А. Н. Филатов, Усреднение в системах дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, «Фан», Ташкент, 1967.
5. А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Об одном варианте усреднения в системах интегро-дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, т. 5, № 5, 1969.
6. А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Усреднение в одной системе интегро-дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, Изв. АН УзССР, сер. техн. наук, № 2, 1969.
7. А. Н. Филатов, Л. И. Талипова, Об одном варианте усреднения в интегро-дифференциальных уравнениях, ДАН СССР, т. 192, № 4, 1970.
8. А. Н. Филатов, Методы усреднения в дифференциальных и в интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1971.
9. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1971.
10. Ю. А. Митропольский, А. Н. Филатов, Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, УМЖ, т. 24, № 1, 1972.

Поступила 10.IV 1973 г.

Институт кибернетики с ВЦ АН УзССР