УДК 517.9

# Система линейных уравнений и их решение

*Дж. Л. Арора, Б. Сингх*

1. Рассмотрим систему $m$ уравнений с $n$ неизвестными

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

В матричной форме эту систему можно записать следующим образом: $Ax = b$, где $A$ — матрица коэффициентов, $b$ — матрица-столбец из постоянных и $x$ — матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица $A$ определяет линейное преобразование $T: V_n \to V_m$ по отношению к некоторым фиксированным базисам в $V_n$ и $V_m$; $V_n$ и $V_m$ — пространства последовательностей из $n$ и $m$ вещественных чисел с обычным скалярным произведением $\langle , \rangle$.

При выборе стандартных базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ в $V_n$ и $V_m$ линейное преобразование $T: V_n \to V_m$ можно определить так:

$$\begin{aligned} T(e_i) &= a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \ldots + a_{mi}f_m, \\ &= (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}), \\ &= a_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

где $\alpha_i$ является $i$-м столбцом матрицы $A$, $\alpha_i'$ получено транспонированием $\alpha_i$.

$R_T$ (область значений $T$) — линейная оболочка $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$. В выражениях $R_T =$ л. о. $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\} =$ л. о. $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ индексами л. о. $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ обозначается оболочка множества $\{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$. Здесь $\alpha_i$ — столбец коэффициентов при $x_i$ в системе (1). Следовательно, систему (1) можно записать еще в виде

$$x_1\alpha_1' + x_2\alpha_2' + \ldots + x_n\alpha_n' = b'. \tag{2}$$

Таким образом, можем рассматривать решение системы как координаты* вектора $b'$ относительно $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$.

Равенство (2) справедливо тогда и только тогда, когда $b' \in R_T$. Следовательно, система (1) имеет решение тогда и только тогда, когда $b' \in R_T$.

Итак, проблема нахождения решения системы (1) эквивалентна проблеме отыскания координат вектора $b'$ по отношению к $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$.

В этой статье предлагается один из методов нахождения решения системы (1).

2. Рассмотрим следующие векторы в $V_{m+n}$: $\delta_i = (\alpha'_i, e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\delta_{n+1} = (-b', 0_n)$, $\alpha'_i$ — матрица-строка, транспонированная к $\alpha_i$, $b'$ — транспонирование $b$ и $0_n$ — нулевой вектор в $V_n$.

Докажем теорему, дающую решение системы (1).

Теорема. *Вектор* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_n$ *является решением системы* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$x_1\delta_1 + x_2\delta_2 + \ldots + x_n\delta_n + \delta_{n+1} = (0_m, x).$$

Здесь $(0_m, x)$ обозначает $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство этой теоремы простое. Необходимость следует тривиально, так как

$$\begin{aligned} x_1\delta_1 + x_2\delta_2 + \ldots + x_n\delta_n &= (x_1\alpha'_1 + x_2\alpha'_2 + \ldots + x_n\alpha'_n, x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n), \\ &= (b', x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &= (b', 0_n) + (0_m, x) = -\delta_{n+1} + (0_m, x). \end{aligned}$$

Наоборот, если $x_1\delta_1 + x_2\delta_2 + \ldots + x_n\delta_n + \delta_{n+1} = (0_m, x)$, т. е. $(x_1\alpha'_1 + x_2\alpha'_2 + \ldots + x_n\alpha'_n - b', \ x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = (0_m, x)$, тогда $x_1\alpha'_1 + x_2\alpha'_2 + \ldots + x_n\alpha'_n = b'$. Следовательно, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$—решение системы (1).

Из этой теоремы следует, что если применить операцию сложения строк в матрице размера $(n+1) \times (m+n)$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \\ \delta_{n+1} \end{pmatrix}$$

так, чтобы получить нули на первых $m$ местах в последней строке, то последние $n$ чисел в последней строке этой же матрицы дадут решение системы (1).

Если же такая операция невозможна, мы получаем, что $b' \notin$ л. о. $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$, т. е. система (1) не имеет решения.

3. Пусть $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ — максимальное подмножество в $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$ линейно независимых элементов. Каждая $\beta_i$ (матрица-строка) является некоторой матрицей-строкой $\alpha'_j$. Тогда $R_T =$ л. о. $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$.

Обозначим через $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n$ остальные $\alpha'_j$, оставшиеся в силу их линейной зависимости от $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$. Таким образом, множества

---

* Совокупность $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не является координатами $b'$ в истинном смысле слова, так как множество $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$ не обязательно состоит из линейно независимых элементов. А в таком случае числа $x_i$ определяются неоднозначно. Кроме того, любой вектор $b'$ не обязательно принадлежит линейной оболочке $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$. Термин «координаты» использован здесь в широком смысле.

$\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n\}$ и $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ одинаковы за исключением, возможно, только порядка элементов в них. Тогда

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ji}\beta_i, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3}$$

Согласно определению, $\delta_i$ — удлинение вектора $\alpha'_i$ при помощи вектора $e_i$. Будем говорить, что вектор $e_i$ ассоциирован с вектором $\alpha'_i$ (или $\alpha_i$ ассоциирован с $e_i$).

Каждый элемент $\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, представляет собой какой-то элемент $\alpha'_j$ и каждый $\alpha'_j$ ассоциирован с некоторым $e$-вектором.

Определим теперь вектор $E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таким образом, чтобы он совпадал с тем $e$-вектором, который ассоциирован с элементом $\alpha'_j$, совпадающим, в свою очередь, с $\beta_i$. Другими словами, если $\beta_i = \alpha'_j$, тогда $E_i = e_j$.

Таким образом, $\beta_i$ и $E_i$ оказываются ассоциированными друг с другом.

Рассмотрим векторы $\mu_i = (\beta_i, E_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\mu_{n+1} = \delta_{n+1}$.

Используя (3), можем выразить векторы $\mu_j$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$, следующим образом: $\mu_j = \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ji}\beta_i, E_j\right)$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Значит, в матрице

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \\ \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_n \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix}$$

строки, начиная с $k+1$-й до $n$-й, можно представить в виде $\underline{\mu_i} = \Bigl(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, E_j - \sum_{i=1}^{k} c_{ji}E_i\Bigr)$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$, посредством элементарных операций над строками. В результате получим эквивалентную матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \\ \underline{\mu_{k+1}} \\ \vdots \\ \underline{\mu_n} \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Если $b' \in$ л. о. $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) =$ л. о. $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, тогда $b' = d_1\beta_1 + d_2\beta_2 + \ldots + d_k\beta_k$ с некоторыми числами $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Следовательно,

$$d_1\mu_1 + d_2\mu_2 + \ldots + d_k\mu_k + d_{k+1}\underline{\mu_{k+1}} + \ldots + d_n\underline{\mu_n} + \mu_{n+1} =$$
$$= (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{5}$$

Таким образом, с помощью элементарных операций над строками последняя строка в матрице (4) может быть приведена к виду (5), где $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — вектор

$$d_1E_1 + d_2E_2 + \ldots + d_kE_k + d_{k+1}E_{k+1} + \ldots + d_nE_n - d_{k+1}\sum_{i=1}^{k} c_{k+1,\,i}E_i -$$

$$- d_{k+2}\sum_{i=1}^{k} c_{k+2,\,i}E_i - \ldots - d_n\sum_{i=1}^{k} c_{ni}E_i,$$

т. е.

$$\left(d_1 - \sum_{i=k+1}^{n} d_ic_{i1}\right)E_1 + \ldots + \left(d_k - \sum_{i=k+1}^{n} d_ic_{ik}\right)E_k +$$

$$+ d_{k+1}E_{k+1} + d_{k+2}E_{k+2} + \ldots + d_nE_n.$$

Равенство (5) справедливо при любых выборах чисел $d_{k+1}, \ldots, d_n$ и при однозначных значениях $d_1, d_2, \ldots, d_k$, так как $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n$ имеют нули на первых $m$ местах, а $d_1, d_2, \ldots, d_k$ координаты вектора $b'$ относительно базиса $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ в $R_T$. Следовательно, согласно теореме, вектор $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ является решением системы (1).

**4.** Предложенный в п. 3 метод решения системы (1) представляется трудоемким потому, что необходимо отыскивать координаты векторов $b'$, $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$ относительно базиса $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ в $R_T$, что, в свою очередь, приводит к необходимости решать определенные системы уравнений. Ниже предлагается более удобный и упрощенный метод.

Известно, что если $w$ принадлежит линейной оболочке множества $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ из ортогональных элементов, тогда $w$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации [1]:

$$w = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w, v_i\rangle}{\| v_i \|^2} v_i.$$

Здесь $\langle , \rangle$ — обычное скалярное произведение. Кроме того, если $w$ не принадлежит линейной оболочке $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, тогда вектор

$$w - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle w, v_i\rangle}{\| v_i \|^2} v_i$$

ортогонален каждому вектору $v_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть

$$p_1 = \alpha_1,$$

$$p_j = \alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \alpha'_j, p'_i\rangle}{\| p'_i \|^2} p_i, \quad 2 \leqslant j \leqslant n.$$

Если $\alpha'_j$ зависит от $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{j-1}$, тогда соответствующий вектор $p'_j$ оказывается равным нулевому вектору. Также, если $p'_i$ — нулевой вектор при некотором $i$, скажем $i_0$, тогда коэффициент при $p_{i_0}$ в $p_j$, $i_0 + 1 \leqslant j \leqslant n$, принимает вид $\frac{0}{0}$, который следует интерпретировать как произвольную константу. Это множество векторов $\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_n\}$ (некоторые из $p'_i$ могут быть нулевыми векторами) является множеством из ортогональных элементов, но не обязательно линейно независимых. Множество ненулевых векторов из $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ является множеством из ортогональных и линейно независимых элементов. Очевидно, л. о. $(p'_1, p'_2, \ldots, p'_n) =$ л. о. $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$.

Замечание. Вектор $b' \in$ л. о. $(p'_1, \ldots, p'_n)$ тогда и только тогда, когда вектор

$$b' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b', p'_i \rangle}{\| p'_i \|^2} p'_i$$

— нулевой. Следовательно, система не имеет решения, если вектор

$$b' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b', p_i \rangle}{\| p'_i \|^2} p'_i \neq 0.$$

Пусть

$$u_1 = (p'_1, e_1),$$
$$u_j = (p'_j, n_j), \quad 2 \leqslant j \leqslant n,$$

где $n_j = e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle a'_j, p'_i \rangle}{\| p'_i \|^2} n_i, \quad 2 \leqslant j \leqslant n;\ n_1 = e_1$

и

$$u_{n+1} = \mu_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b', p'_i \rangle}{\| p'_i \|^2} u_i = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b', p'_i \rangle}{\| p'_i \|^2} p'_i - b', \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle b', p'_i \rangle}{\| p'_i \|^2} n_i \right). \quad (6)$$

Решение системы (1), если оно существует, следует из (6), замечания и теоремы.

**5.** Для того, чтобы применять изложенный в п. 4 метод отыскания решения системы (1), поступаем следующим образом.

Составляем матрицу $K$ порядка $(m+n) \times (n+1)$, в которой $i$-й столбец, обозначаемый через $k_i$, является вектором $\delta'_i$, т. е. $K = (\delta'_1, \delta'_2, \ldots$ $\ldots, \delta'_n, \delta'_{n+1})$, где $\delta'_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ e'_i \end{pmatrix}$ получается транспонированием матрицы-строки $\delta_i = (\alpha'_i, e_i)$, определенной в п. 2. Разбитая на матричные блоки, матрица $K$ имеет вид

$$K = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n & -b \\ \hline e'_1 e'_2 \ldots e'_n & 0 \end{array} \right).$$

Используя метод ортогонализации Грама—Шмидта [1], находим постоянную $c_1$ такую, что $p'_1 = \alpha'_1$ и $p'_2 = \alpha'_2 - c_1 \alpha'_1$ ортогональны. Заменяем $k_2$ на $l_2 = k_2 - c_1 k_1$. Первые $m$ элементов в $l_2$ образуют вектор $p_2$, а $m$ первых элементов в $l_1 = k_1$ — вектор $p_1$; $p'_1$ и $p'_2$ ортогональны.

Аналогично найдем новые постоянные $c_1$ и $c_2$ такие, чтобы $p'_1, p'_2$ и $p'_3 = a'_3 - c_2 p'_2 - c_1 p'_1$ оказались взаимно ортогональными, и заменяем $k_3$ на $l_3 = k_3 - c_2 l_2 - c_1 l_1$. Первые $m$ элементов в $l_3$ дают $p_3$ и т. д.

Если на каком-то шаге $p'_i$ окажется нулевым вектором, тогда коэффициенты при $p'_i$ в дальнейших операциях окажутся вида $\frac{0}{0}$, который следует понимать как произвольную постоянную.

Повторяем процесс до тех пор, пока $k_{n+1}$ не окажется замененным на $l_{n+1}$. Если первые $m$ элементов в $l_{n+1}$ образуют нулевой вектор в $V_m$, тогда решение существует и дается последними $n$ элементами в $l_{n+1}$.

Если же первые $m$ элементов в $l_{n+1}$ не образуют нулевой вектор, тогда система не имеет решения. В этом случае мы говорим, что система несовместима.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hoffman and R. Kunze, Linear Algebra, Prentice Hall, 2nd edition, 1971.

Поступила 24.X 1973 г.
Индия