УДК 519.3:62—50

І. В. Бейко, М. М. Копець

Про нуль-керованість лінійних стаціонарних систем в банаховому просторі

Нехай рух керованої системи описується рівнянням

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

де A — лінійний замкнений, взагалі кажучи, необмежений оператор в рефлексивному банаховому просторі E, його область визначення $D(A)$ всюди щільна в E, B — лінійний обмежений оператор, який діє з банахового простору E_1 в E, при $t \geqslant 0$ $x(t) \in E$, $u(t) \in E_1$. Припустимо, що задача Коші для рівняння $\dot{x}(t) = Ax(t)$ є рівномірно коректною (див. [1, с. 58]). При виконанні цих умов в [2] доведено таку лему.

Лема. *Система* (1) *є нуль-керованою тоді і тільки тоді, коли не існує ненульовий елемент $u \in E^*$ такий, що*

$$B^*S^*(t)u = \theta, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

де $S^*(t)$ — півгрупа, спряжена до півгрупи класу C_0, породженої оператором A, B^* — оператор, спряжений до оператора B.

Наявність у співвідношенні (2) $S^*(t)$ створює певні незручності при практичному використанні цієї умови. Бажано мати критерії нуль-керованості системи (1), в які $S^*(t)$ не входила б.

В силу рівномірної коректності задачі Коші для рівняння $\dot{x}(t) = Ax(t)$ існує $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|S(t)\| = \omega$, причому $\omega < \infty$. Тому при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ і $u \in E^*$ маємо $R_\lambda(A^*)u = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S^*(t)u\,dt$. Використовуючи це співвідношення, приходимо до такого висновку.

Наслідок 1. *Система* (1) *є нуль-керованою тоді і тільки тоді, коли не існує $u \neq \theta$ із E^* такий, що при всіх $\operatorname{Re}\lambda > \omega$*

$$B^*R_\lambda(A^*)u = \theta. \tag{3}$$

Якщо резольвентна множина оператора A^* зв'язна, то для нуль-керованості системи (1) необхідно і досить, щоб не існував $u \neq \theta$ із E^* такий, що співвідношення (3) виконується на всій резольвентній множині оператора A^*.

Якщо при всіх $n = 1, 2, \ldots$ маємо $u \in D(A^{*n})$, то, диференціюючи співвідношення (2), отримаємо $B^*A^{*n}u = \theta$, $n = 1, 2, \ldots$. Крім цього, для кожного обмеженого оператора A виконання останніх співвідношень необхідно і досить для того, щоб при всіх $t \geqslant 0$ мало місце співвідношення (2). Тому вірний такий наслідок.

Наслідок 2. *Кожний елемент $u \neq \theta$, який задовольняє при всіх $t \geqslant 0$ співвідношення* (2) *і умови $u \in D(A^{*n})$, $n = 1, 2, \ldots$, задовольняє також і співвідношення $B^*A^{*n}u = \theta$, $n = 1, 2, \ldots$. Якщо оператор обмежений, то для нуль-керованості системи* (1) *необхідно і досить, щоб система рівнянь $B^*A^{*n}u = \theta$, $n = 1, 2, \ldots$ мала тільки тривіальний розв'язок $u = \theta$.*

Легко переконатись в тому, що кожний власний елемент u оператора A^*, який задовольняє співвідношення $B^*u = \theta$, при всіх $t \geqslant 0$ задовольняє також і співвідношення (2). Навпаки, припустимо, що резольвентна множина оператора A^* є зв'язною і нехай λ_0 — полюс резольвенти $R_\lambda(A^*)$ оператора A^*, P^* — проектор на відповідний інваріантний підпростір. Якщо система (1) не є нуль-керованою, то в околі точки λ_0 досить малого радіуса (тобто в околі, де немає інших особливих точок резольвенти) виконується рівність (3). Враховуючи вирази для коефіцієнтів A_m^* розвинення в ряд Лорана функції $R_\lambda(A^*)$ (див. [3, с. 317]), отримуємо, що $B^*A_m^*u = \theta$. Якщо при цьому $P^*u \neq \theta$, то в цьому інваріантному підпросторі завжди існує елемент $z \neq \theta$, для якого маємо $A^*z - \lambda_0 z = \theta$ і $B^*z = \theta$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема. *Якщо існує власний елемент u оператора A^*, для якого $B^*u = \theta$, то система* (1) *не є нуль-керованою. У випадку, коли резольвентна множина оператора A^* зв'язна, резольвента R_λ (A^*) має полюс і система кореневих підпросторів оператора A^* повна, то для нуль-керованості системи* (1) *необхідно і досить, щоб оператор B^* не анулювався ні на одному власному елементі оператора A^*.*

Наслідок 3. *Якщо оператор A^* є оператором простого типу* (див. [4, с. 87]), *то для нуль-керованості системи* (1) *необхідно і досить, щоб система рівнянь $A^*u - \lambda u = \theta$, $B^*u = \theta$, де λ — деяке число, мала тільки тривіальний розв'язок $u = \theta$.*

Наслідок 4. *В n-вимірному евклідовому просторі існування числа λ і елемента $u \neq \theta$, які задовольняють умови $A^*u - \lambda u = \theta$ і $B^*u = \theta$, рівносильно тому, що ранг матриці $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ менший від n.*

Наслідок 5. *Якщо існують число λ і елемент $u \neq \theta$, що задовольняють співвідношення $A^*u - \lambda u = \theta$ і $B^*u = \theta$, то не нуль-керованою є система $\dot{x}(t) = (A + BC)x(t) + Bu(t)$, де C — довільний лінійний обмежений оператор, який діє із E в E_1.*

Розглянемо приклад, який показує ефективність отриманих вище умов нуль-керованості. Нехай область G в просторі R_2 задається нерівностями: $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi/a_1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi/a_2$, де $a_1, a_2 > 0$. Оператор A задамо так: $Aw = \partial^2 w/\partial x_1^2 + \partial^2 w/\partial x_2^2$ всередині G, і $Aw = 0$ на границі області G. Він є лінійним самоспряженим оператором в просторі $L^2(G)$, його власні числа і власні функції відповідно мають вигляд $\lambda_{n_1n_2} = -(a_1^2n_1^2 + a_2^2n_2^2)$, $\varphi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \sin a_1n_1x_1 \sin a_2n_2x_2$, $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$, причому власні функції є ортогональними. Оператор B задамо таким способом: $Bu = (\varphi_{n_{10}n_{20}}, u)_{L^2(G)}\varphi_{n_{10}n_{20}}$, де $(,)_{L^2(G)}$ означає скалярний добуток в $L^2(G)$, $\varphi_{n_{10}n_{20}}$ — деяка власна функція оператора A. Легко перевірити, що B є лінійним обмеженим самоспряженим оператором в $L^2(G)$. Крім цього, в силу ортогональності функцій $\varphi_{n_1n_2}$ при кожному $n_1 \neq n_{10}$ або $n_2 \neq n_{20}$ маємо $B\varphi_{n_1n_2} = \theta$, але $\varphi_{n_1n_2} \neq \theta$. На основі доведеної вище теореми приходимо до висновку, що система $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ в цьому випадку не є нуль-керованою в просторі $L^2(G)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
2. H. O. Fattorini, On complete controllability of linear systems.— J. Diff. Equat., vol. 3, 1967, 391—402.

3. К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.
4. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970.

Інститут математики АН УРСР
Трест «Укргеофізрозвідка»

Надійшла до редакції 29.X 1974 р.,
після переробки — 6.I 1975 р.