УДК 517.54

М. Т. Бродович

До питання про довільні відображення $f: D \to R^2$, що задовольняють умову K'' Меньшова

Нехай D — область в R^2, $f: D \to R^2$, неперервність відображення f не припускається.

Означення. Функція f задовольняє умову K'' в точці $z \in D$, якщо із точки z виходять три неколінеарні промені $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, вздовж яких

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z + \Delta z \in \bigcup_{i=1}^{3} t_i(z)}} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| = k(z) < \infty. \tag{1}$$

Відома така теорема [1, 2].

Теорема (Меньшова). *Нехай $f: D \to R^2$ — гомеоморфізм області D і $\forall z \in D$, виключаючи, можливо, скінченну чи зчисленну множину точок, функція f задовольняє умову K'', тоді або f або $\bar{f}$ — конформне відображення в області D.*

Теорема Меньшова не поширюється без змін на довільні відображення. Маємо приклад розривного відображення

$$f = \begin{cases} z, & z \in D_1, \\ z + 1, & z \in D_2, \end{cases}$$

де $D_1 = \underset{z}{E}\left\{0 < x < \frac{1}{2};\ 0 < y < 1\right\}$, $D_2 = \underset{z}{E}\left\{\frac{1}{2} \leqslant x < 1;\ 0 < y < 1\right\}$, що задовольняє умову K'' в $\forall z \in D$.

В роботі [3] введено таке означення.

Означення. Функція f задовольняє умову K^* в точці z, якщо із цієї точки виходять три промені $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ такі, що в кожну півплощину попадає промінь, і вздовж цих променів маємо співвідношення (1).

В роботі [3] доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай $f: D \to R^2$ — довільне взаємно однозначне відображення області D і $\forall z \in D$ відображення f задовольняє умову K^*, тоді або f або $\bar{f}$ — конформне відображення в області D.*

У цій замітці розглянемо довільне відображення $f: D \to R^2$, D — область в R^2, що задовольняє в $\forall z \in D$ умову K''.

Виявляється, що міра множини точок розриву такої функції, нехай множина β, може бути додатною і як завгодно близькою до міри mD.

Побудуємо відповідний приклад.

Нехай $\square = \{z: 0 < x < 1;\ 0 < y < 1\}$, $z = x + iy$. Нехай з $\forall z \in \square$ виходять три промені $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, напрямлені таким чином: $t_1(z)$ має напрямок осі Ox, $t_2(z)$ — протилежний напрямок до осі Oy, $t_3(z)$ — бісектриса прямого кута $[t_1(z) \frown t_2(z)]$.

Нехай l_x^1, l_y^1 — дві горизонтальні і дві вертикальні, однакової ширини, замкнені смуги, відповідно такі, що $\square - (l_x^1 \cup l_y^1) = \bigcup_{j=1}^{9} \delta_j^1$, де δ_j^1 ($j = 1, 2, \ldots, 9$) — відкриті, рівні квадрати; перетин смуг l_x^1, l_y^1 — замкнені квадрати, нехай $\square_i^1$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Позначимо через l_{xy}^1 систему замкнених смуг, паралельних променю $t_3(z)$, що містять квадрати $\{\square_i^1\}$ і мають найменшу площу. Нехай $m\{l_x^1 \cup l_y^1 \cup l_{xy}^1\} < \frac{\varepsilon}{2}$, число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < m\square = 1$.

Нехай l_x^2, l_y^2 — системи горизонтальних і вертикальних замкнених смуг, однакової ширини, відповідно $l_x^2 \cap l_x^1 = 0$, $l_y^2 \cap l_y^1 = 0$, такі, що множина $\square - \bigcup_{k=1}^{2} (l_x^k \cup l_y^k)$ — скінченна система однакових відкритих квадратів $\{\delta_j^2\}$ ($j = 1, 2, \ldots, 3^{2n_1}$, число n_1 означено нижче); $\square_i^2$ ($i = 1, 2, \ldots, i_2$) — скінченна система тих квадратів перетину смуг l_x^2 і l_y^2, для яких маємо включення $\square_i^2 \subset \square - (l_x^1 \cup l_y^1 \cup l_{xy}^1)$. Кількість смуг систем l_x^2, l_y^2, а значить і число n_1, такі, що $\forall \delta_j^1 \exists \square_i^2$, $\square_i^2 \subset \delta_j^1$. Система смуг l_{xy}^2, $l_{xy}^2 \supset \bigcup_{i=1}^{i_2} \square_i^2$, побудована аналогічно системі смуг l_{xy}^1. Можемо вважати, що $m(l_x^2 \cup l_y^2 \cup l_{xy}^2) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Продовжуючи побудову $\forall k = 1, 2, \ldots$, одержимо, аналогічно, як для $k = 2$, системи смуг l_x^k, l_y^k, l_{xy}^k, $m(l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ і скінченні системи квадратів $\square_i^k$ ($i = 1, 2, \ldots, i_k$). З побудови ясно, що кожна точка $z \in \square \cap C \bigcup_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}$ — гранична точка множини $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_k} \square_i^k$.

Позначимо через $\tilde{\square}_i^k$ напіввідкритий квадрат: $\tilde{\square}_i^k$ одержуємо з квадрата $\square_i^k$, викидаючи з нього праву і нижню сторони (замкнені відрізки) і означимо функцію

$$f = \begin{cases} z + 1, & z \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{i_k} \tilde{\square}_i^k, \\ z, & z \in \square - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_k} \tilde{\square}_i^k. \end{cases}$$

Легко бачити, що функція f розривна $\forall z \in \square \cap C \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}}$; $m\left(\square \cap C \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}}\right) > 1 - \varepsilon$. Таким чином, множина точок розриву функції f, нехай множина β, $\beta = \square \cap C \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{i_k} (\square_i^k - (\square_i^k)^0)$, $m\beta > 1 - \varepsilon$; на множині $\square - \beta$ функція f — аналітична.

Функція f задовольняє $\forall z \in \square$ умову K'' вздовж побудованої вище системи променів $t_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$ і $\forall z \in \square$ $\lim\limits_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z+\Delta z \in \bigcup_{i=1}^{3} t_i(z)}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 1.$

Дійсно, оскільки з побудови видно, що кожен прямолінійний перетин квадрата $\square$, паралельний променям $t_1(z)$, $t_2(z)$, $t_3(z)$, перетинає хіба що скінченне число квадратів $\square_i^k$, то легко перевіряється умова K'' для точок $z \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}$; для точок $z \in \square - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{l_x^k \cup l_y^k \cup l_{xy}^k\}$ умова K'' виконується очевидно.

Отже, побудована функція f задовольняє $\forall z \in \square$ умову K'' і розривна $\forall z \in \beta$, $m\beta > 0$.

Для відображення $f: D \to R^2$, що задовольняє в $\forall z \in \square$ умову K'', маємо такі твердження:

Т в е р д ж е н н я 1. *Нехай $f: D \to R^2$ — довільне відображення області D, що задовольняє в $\forall z \in D$ умову K'', тоді існує відкрита всюди щільна в області D множина G, в кожній компоненті якої або функція f або функція $\bar{f}$ — аналітична.*

Доведення аналогічне до доведення леми 1 із роботи [3].

Т в е р д ж е н н я 2. *В умовах твердження 1 функція f апроксимативно неперервна майже всюди.*

Д о в е д е н н я. В силу твердження 1, функція $f: D \to R^2$ неперервна всюди в області D, виключаючи досконалу множину, нехай β. Припустимо, що $m\beta > 0$, в противному випадку твердження 2 справджується. Нехай множина β_0 — досконала множина, додатної міри в кожній своїй порції, $\beta_0 \subset \beta$. Методами леми 12 із роботи [2] можна одержати порцію $\bar{\beta}$ множини β_0, $m\bar{\beta} > 0$, множину β', $\beta' \subset \bar{\beta}$, всюди щільну на $\bar{\beta}$, число $\sigma > 0$ такі, що

1) $[t_i(z') \frown t_i(z'')] < \sigma$ $(i=1, 2, 3)$, $z', z'' \in \beta'$ через $[t_i(z') \frown t_i(z'')]$ позначено найменший кут між променями $t_i(z')$, $t_i(z'')$;

2) $800\sigma < [t_i(z) \frown t_j(z)] < \pi - 800\sigma$ $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$, $z \in \beta'$;

3) $\left| \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} \right| < \frac{1}{\sigma}$, $0 < |\zeta - z| < \sigma$, $\zeta \in \bigcup\limits_{i=1}^{3} t_i(z)$, $z \in \beta'$.

Доведемо, що в кожній точці щільності порції $\bar{\beta}$ функція f апроксимативно неперервна.

Нехай z_0 — точка щільності множини $\bar{\beta}$; точка $z_1 \in \beta'$ і промені $t_1(z_1)$, $t_2(z_1)$ такі, що точка z_0 знаходиться в куті $[t_1(z_1) \frown t_2(z_1)]$. Нехай $z_2, z_3 \in [t_1(z_1) \frown t_2(z_1)]$ і $z_2, z_3 \in \beta'$. Нехай промені $t_1(z_1)$, $t_2(z_1)$ і $t_1(z_2)$, $t_2(z_3)$ перетинаючись утворюють чотирикутник P, що містить точку z_0. Якщо діаметр множини, що складається з чотирикутника P і точок z_2, z_3, достатньо малий, то, в силу 3) для точок z_1, z_2, $z_3 \in \beta'$ і умови K'' в точці z_0 (чотирикутник P перетинається променями $t_i(z_0)$ $(i=1, 2, 3)$, вздовж яких функція $f(z)$ неперервна в точці z_0), значення функції $f(z)$ на сторонах чотирикутника P як завгодно близькі до значення $f(z_0)$. Промені $t_i(z)$ $(i=1, 2, 3)$ $z \in \beta'$, якщо z лежить всередині чотирикутника P, також перетинають чотирикутник P; тому легко бачити, що $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \beta'}} f(z) = f(z_0)$, і функція $f(z)$ неперервна в точках щільності множини $\bar{\beta}$ відносно β', апроксимативно неперервна в точці z_0. Отже, функція $f(z)$ апроксимативно неперервна на множині $\bar{\beta}$ майже всюди.

Якщо $m(\beta_0 - \bar{\beta}) > 0$ (у випадку $m(\beta_0 - \bar{\beta}) = 0$ твердження 2 має місце), розглянемо досконалу множину β_1, додатної міри в кожній своїй порції, $\beta_1 \subset \beta_0 - \bar{\beta}$, $m\beta_1 = m(\beta_0 - \bar{\beta})$. Аналогічно, як вище, доводиться існування порції $\bar{\beta}^1$ множини β_1, $m\bar{\beta}^1 > 0$, на якій функція $f(z)$ апроксимативно неперервна майже всюди. Якщо $m(\beta_0 - (\bar{\beta} \cup \bar{\beta}^1)) > 0$, то існує досконала множина $\beta_2 \subset \beta_0 - (\bar{\beta} \cup \bar{\beta}^1)$, додатної міри в кожній своїй порції $m\beta_2 = m(\beta_0 - (\bar{\beta} \cup \bar{\beta}^1))$.

Продовжуючи цей процес, одержимо послідовність досконалих множин $\beta_0 \supset \beta_1 \supset \beta_2 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots \supset \beta_\alpha \supset \ldots$, занумеровану скінченними і, можливо, трансфінітними порядковими числами другого класу. Оскільки за побудовою $m\beta_0 > m\beta_1 > m\beta_2 > \ldots > m\beta_n > \ldots > m\beta_\alpha > \ldots$, то в силу принципу стаціонарності Кантора — Бера, послідовність $\{\beta_\alpha$ обривається, існує скінченне чи трансфінітне число α_0 другого класу таке, що $\alpha < \alpha_0$, $m\beta_{\alpha_0} = 0$. Твердження 2 доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. D. Menchoff, Sur les fonction monogénes — Bull. Soc. math. de France, 59, 1931.
2. Ю. Ю. Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности. Физматгиз, М., 1963.
3. М. Т. Бродович, Об условиях моногенности не непрерывных отображений.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 12, Изд-во Харьковского университета, 1970.

Львівський політехнічний інститут

Надійшла до редакції
3.VI 1974 р.