УДК 517.55

В. Й. Горбайчук

Про деякі властивості сингулярного інтеграла Коші—Пуассона

Позначимо через L_p, $1 \leqslant p < \infty$, клас функцій $f(x)$, інтегрованих на $-\infty < x < \infty$ з нормою

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u|^p du \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Сингулярним інтегралом Коші — Пуассона, відповідним функції $f \in L_p$,

$1 \leqslant p < \infty$, називається інтеграл

$$P(f; x, y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-u)}{y^2+u^2}\, du, \tag{1}$$

де параметр $y \to 0^+$. Відомо [1, с. 126], що для $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, інтеграл (1) існує для всіх $x \in (-\infty, \infty)$ та $y > 0$ і для функцій $f(x)$ із класу $L_p \cap C^\infty$ задовольняє умови

$$\| P(f; x, y) \|_p \leqslant \| f \|_p, \quad y > 0, \quad \lim_{y \to 0^+} \| P(f; x, y) - f(x) \|_p = 0, \tag{2}$$

Сингулярний інтеграл Коші — Пуассона відіграє важливу роль в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Можна показати, що він є розв'язком задачі Діріхле для рівняння Лапласа у верхній півплощині з граничною функцією $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Функція (1) є дійсною частиною аналітичної в півплощині $y > 0$ функції $H(z)$:

$$H(z) \equiv H(x + iy) = P(f; x, y) + iQ(f; x, y),$$

де функція $Q(f; x, y)$ для $y > 0$ і $x \in (-\infty, \infty)$ визначається інтегралом

$$Q(f; x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{u}{y^2+u^2}\, du. \tag{3}$$

Функцію $Q(f; x, y)$ називають спряженим інтегралом Коші — Пуассона.

Із (2) випливає, що при $y \to 0^+$ $P(f; x, y)$ збігається в середньому з показником p до граничної функції $f(x)$. Границя $Q(f; x, y)$ при $y \to 0^+$ дає функцію, яку називають спряженою до функції $f(x)$ (або перетворенням Гільберта функції $f(x)$) і позначають $\tilde{f}(x)$. Якщо $y \to 0^+$, то із (3) формально одержуємо

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{x-u}\, du. \tag{4}$$

Відомо [1, с. 306], що $\tilde{f}(x)$ існує не для всякої $f(x)$ і не завжди. Тому, якщо $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то під $\tilde{f}(x)$ розуміють головне значення інтеграла (4) за Коші.

Якщо $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то $\tilde{f}(x)$ існує майже скрізь (див. [1, с. 310]).

В роботі [1 с. 322] одержана така теорема.

Теорема А. *Нехай* $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$. *Якщо* $f(x) \in \in \operatorname{Lip}(L_p, \alpha)$, *то* $\tilde{f}(x) \in \operatorname{Lip}(L_p, \alpha)$.

При $1 < p < \infty$ ця теорема доведена Тітчмаршем (див. [2, с. 192]). Нижче поширюємо цю теорему на більш широкий клас функцій.

Позначимо через $H^\omega L_p$ клас функцій $f(x) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, для яких $\| f(x+h) - f(x) \|_p \leqslant \omega(|h|)$, де $\omega(t)$, $t > 0$ — функція типу модуля неперервності (див. [3, с. 108]).

Введемо оператор $(Z\omega)(t)$ формулою

$$(Z\omega)(t) = \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}\, du + t \int\limits_t^{\infty} \frac{\omega(u)}{u^2}\, du.$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $f(x) \in H^{\omega}L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, *і* $(Z\omega)(t)$ — *скінченна функція, то функція* $\tilde{f}(x)$ *має інтегральний модуль неперервності* $\omega(\tilde{f}; t)$, *який задовольняє умову*

$$\omega(\tilde{f}; t) \leqslant A(Z\omega)(t), \tag{5}$$

де $A > 0$ — *стала, яка не залежить від* t.

Наслідок. *При* $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *одержуємо теорему А.*

Доведення теореми 1 складається з двох частин: 1) $1 < p < \infty$; 2) $p=1$. У випадку 1) доведення спирається на той факт, що операція перетворення Гільберта при $1 < p < \infty$ є обмеженим лінійним перетворенням L_p в L_p, а тому за теоремою М. Рісса [2, с. 176] маємо

$$\| \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) \|_p \leqslant M_p \| f(x+h) - f(x) \|_p; \quad M_p > 0.$$

У випадку $p = 1$ і $f(x) \in L_1$ теорема М. Рісса втрачає силу. В цьому випадку спряжена функція $\tilde{f}(x)$ ще існує майже скрізь, але уже не обов'язково належить до L_1 (див. [2, с. 190]).

Внаслідок того, що функція $\tilde{f}(x)$ існує майже скрізь як головне значення за Коші сингулярного інтеграла, то із (3), (4) і умов теореми випливає, що різниця

$$Q(f; x, y) - \tilde{f}(x) = \frac{y^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+u) - f(x-u)}{u(u^2+y^2)} \, du$$

належить класу L_1. Використовуючи узагальнену нерівність Мінковського [3, с. 601], одержимо

$$\| Q(f; x, y) - \tilde{f}(x) \|_1 \leqslant \frac{y^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\| f(x+u) - f(x-u) \|_1}{u(y^2+u^2)} \, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{y} \frac{\omega(u)}{u} \, du + y \int_{y}^{\infty} \frac{\omega(u)}{u^2} \, du \right]. \tag{6}$$

Співвідношення (6) фактично дає оцінку швидкості наближення спряженим інтегралом Коші — Пуассона $Q(f; x, y)$ функції $\tilde{f}(x)$ при умові, що $f(x) \in H^{\omega}L_1$.

Легко перевірити, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 - u^2}{(y^2+u^2)^2} \, du = 0.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(f; x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) \frac{y^2-u^2}{(y^2+u^2)^2} \, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-u) - f(x)] \frac{y^2-u^2}{(y^2+u^2)^2} \, du,$$

а тому одержуємо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} Q(f; x, y) \right\|_1 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(|u|) \, |y^2 - u^2|}{(y^2+u^2)^2} \, du =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^y \frac{\omega(u)(y^2-u^2)}{(y^2+u^2)^2}\,du+\int_y^\infty \frac{\omega(u)(u^2-y^2)}{(y^2+u^2)^2}\,du\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{y}\int_0^y \frac{\omega(u)}{u}\,du+\int_y^\infty \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right]. \tag{7}$$

Використовуючи (7), для $h>0$ маємо

$$\|Q(f;x+h,h)-Q(f;x,h)\|_1=\left\|\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}Q(f;x+u,h)\,du\right\|_1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\left[\int_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du+h\int_h^\infty \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right]. \tag{8}$$

Із (6) і (8), застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського і вважаючи $h>0$, одержуємо

$$\|\tilde f(x+h)-\tilde f(x)\|_1\leqslant\|\tilde f(x+h)-Q(f;x+h,h)\|_1+$$

$$+\|Q(f;x+h,h)-Q(f;x,h)\|_1+\|Q(f;x,h)-\tilde f(x)\|_1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{6}{\pi}\left[\int_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du+h\int_h^\infty \frac{\omega(u)}{u^2}\,du\right].$$

Звідси одержуємо нерівність (5) із сталою $A=\frac{6}{\pi}$. Теорему 1 доведено.

Для спряженого інтеграла Коші — Пуассона можна одержати аналог однієї теореми Л. О. Аксентьєва (див. [4, теорема 1]), встановленої для функцій, гармонічних в крузі. А саме, має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай функції $f(x)$ та $f_1(x)$, $-\infty<x<\infty$, мають властивості:*

1) *при фіксованому x і довільному u справедлива нерівність*

$$|f_1(x+u)-f_1(x-u)|\leqslant K|f(x+u)-f(x-u)|,$$

де $K>0$ — деяка стала;

2) *при $u\in(0,\infty)$ функція $f(x+u)-f(x-u)$ недодатна або невід'ємна.*

Тоді має місце оцінка

$$|Q(f_1;x,y)|\leqslant K|Q(f;x,y)|, \tag{9}$$

де $Q(f_1;x,y)$ та $Q(f;x,y)$ — гармонічні у верхній півплощині функції, побудовані відповідно за функціями $f_1(x)$ та $f(x)$. Рівність в (9) досягається при $f_1(x)=Kf(x)$.

Доведення теореми 2 проводиться за схемою Л. О. Аксентьєва з використанням специфічних властивостей функції (3).

ЛІТЕРАТУРА

1. P. L. Butzer, R. J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, vol. 1: One-Dimensional Theory, Academic Press, New York and London, 1971.
2. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

3. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
4. Л. А. Аксентьев, Точные оценки для гармонических в круге функций. — Изв. вузов. Матем., 1968, № 3 (70).

Луцький педагогічний інститут

Надійшла до редакції
28.V 1974 р.