УДК 517.948.32

*Л. М. Ліхтарников, Л. З. Вітова*

# Про розв'язність лінійного інтегрального рівняння з частинними інтегралами

**1.** Нехай оператори $K$ і $N$, де

$$Kh_1 \equiv \int_{D_1} K(x, s)\, h_1(s)\, ds, \quad Nh_2 \equiv \int_{D_2} N(y, t)\, h_2(t)\, dt,$$

є операторами Гільберта — Шмідта відповідно в просторах $L_2(D_i)$ $(i=1,2)$. $D_1$, $D_2$ — обмежені замкнені множини просторів, взагалі кажучи, різної скінченної розмірності.

Через $T$ позначимо оператор, що діє в $L_2(D_1 \times D_2)$:

$$Tu(x, y) = Ku(x, y) + Nu(x, y). \tag{1}$$

Оператор $T$ не є оператором Гільберта — Шмідта.

Рівняння з оператором виду (1) розглядались раніше в [1—3]. Нижче вивчається розв'язність рівняння

$$\lambda u(x, y) = f(x, y) + \int_{D_1} K(x, s)\, u(s, y)\, ds + \int_{D_2} N(y, t)\, u(x, t)\, dt, \tag{2}$$

в якому числовий параметр $\lambda$ відмінний від нуля і $f(x, y) \in L_2(D_1 \times D_2)$.

Як відомо,

$$K(x, s) = \sum_i \alpha_i v_i(x)\, \overline{v_i(s)}, \quad N(y, t) = \sum_j \beta_j \omega_j(y)\, \overline{\omega_j(t)},$$

де $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$, $\{v_i(x)\}$, $\{\omega_j(y)\}$ — системи ненульових власних чисел і відповідних їм власних ортонормованих функцій цих ядер. Позначимо через $k(i)$ (відповідно $n(j)$) кратність власного значення $\alpha_i$ $(\beta_j)$ оператора $K(N)$. Якщо нуль—власне число оператора $K$ (відповідно $N$), то через $\{v_i^0(x)\}$ $(\{\omega_j^0(y)\})$ позначимо ортонормований базис відповідного нуль-простору.

Запровадимо позначення:

$$\varphi_p(y) = (u(x, y), v_p(x))_1, \quad \psi_q(x) = (u(x, y), \omega_q(y))_2,$$

$$a_{pq} = (u(x, y), v_p(x)\, \omega_q(y))_{1,2}, \quad f_p^{(1)}(y) = (f(x, y), v_p(x))_1,$$

$$f_q^{(2)}(x) = (f(x, y), \omega_q(y))_2, \quad f_{pq} = (f(x, y), v_p(x)\, \omega_q(y))_{1,2}.$$

Тоді рівняння (2) запишемо так:

$$\lambda u(x, y) = f(x, y) + \sum_i \alpha_i v_i(x)\, \varphi_i(y) + \sum_j \beta_j \omega_j(y)\, \psi_j(x). \tag{3}$$

Отже, розв'язування рівняння (2) звелось до знаходження функцій $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$, для визначення яких легко одержати систему рівнянь

$$(\lambda - \alpha_i)\varphi_i(y) = f_i^{(1)}(y) + \sum_i \beta_j \omega_j(y) a_{ij} \text{ для всіх } i, \tag{4}$$

$$(\lambda - \beta_j)\psi_j(x) = f_j^{(2)}(x) + \sum_i \alpha_i v_i(x) a_{ij} \text{ для всіх } j, \tag{5}$$

$$(\lambda - \alpha_i - \beta_j) a_{ij} = f_{ij} \text{ для всіх } i \text{ і } j. \tag{6}$$

Позначимо через $(A)$ ту умову, що $\lambda$ дорівнює якійсь парній сумі власних чисел операторів $K$ і $N$, через $(B)$ — ту умову, що $\lambda$ дорівнює якомусь одному із власних чисел оператора $K$ або $N$, через $(\bar{A})$ і $(\bar{B})$ позначимо заперечення умов $(A)$ і $(B)$.

**2**. Нехай $\lambda$ не є власним значенням оператора $T$. Як показано в [3], це можливо лише в таких випадках: а) справджуються умови $(\bar{A})$ і $(\bar{B})$; б) справджуються умови $(\bar{A})$, $(B)$, наприклад, $\lambda$ дорівнює власному числу $\alpha_p$ оператора $K$, але тоді обов'язково нуль не є власним числом оператора $N$.

У випадку а) можна із (6), (4), (5) однозначно визначити всі $a_{ij}$, $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$ і розв'язок рівняння (2) подати у вигляді

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda}\left\{f(x, y) + \int_{D_1} R_1(x, s \mid \lambda) f(s, y)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_{D_2} R_2(y, t \mid \lambda) f(x, t)\, dt + \int_{D_1}\int_{D_2} R(x, y, s, t \mid \lambda) f(s, t)\, ds dt.\right.$$

Тут

$$R_1(x, s \mid \lambda) = \sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda - \alpha_i} v_i(x)\overline{v_i(s)}; \quad R_2(y, t \mid \lambda) = \sum_j \frac{\beta_j}{\lambda - \beta_j}\omega_j(y)\overline{\omega_j(t)}, \tag{7}$$

$$R(x, y, s, t \mid \lambda) = \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda - \alpha_i - \beta_j}\left(\frac{1}{\lambda - \alpha_i} + \frac{1}{\lambda - \beta_j}\right) v_i(x)\omega_j(y)\overline{v_i(s)}\,\overline{\omega_j(t)}. \tag{8}$$

Ряди (7), як відомо, збігаються. Для доведення збіжності ряду (8) розглянемо числовий ряд

$$\sum_i \sum_j \left[\frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda - \alpha_i - \beta_j}\left(\frac{1}{\lambda - \alpha_i} + \frac{1}{\lambda - \beta_j}\right)\right]^2. \tag{9}$$

Оскільки $\lambda$ фіксоване, а $\alpha_i$ і $\beta_j$ прямують до нуля, то можна назвати такий номер $n'$, що для всіх $i$ і $j$ більших $n'$ справджуватимуться співвідношення $|\lambda - \alpha_i| > \frac{|\lambda|}{2}$, $|\lambda - \beta_j| > \frac{|\lambda|}{2}$, $|\lambda - \alpha_i - \beta_j| > \frac{|\lambda|}{2}$. Тоді

$$\left[\frac{\alpha_i \beta_j}{\lambda - \alpha_i - \beta_j}\left(\frac{1}{\lambda - \alpha_i} + \frac{1}{\lambda - \beta_j}\right)\right]^2 \leqslant \frac{64}{|\lambda|^4}\alpha_i^2 \beta_j^2.$$

Тепер збіжність ряду (9), а значить, і (8) випливає із збіжності ряду

$$\sum_i \sum_j \alpha_i^2 \beta_j^2 = \sum_i \alpha_i^2 \sum_j \beta_j^2.$$

Розглянемо випадок б). Нехай, наприклад, $\lambda = \alpha_p$, причому $\alpha_p = \alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_{p+k(p)-1}$. Із (6) і (5) визначаються всі $a_{ij}$ і $\psi_j(x)$, а для сумісності системи (4) необхідно і достатньо, щоб

$$f_i^{(1)}(y) + \sum_j \beta_j \omega_j(y)\, a_{ij} = 0, \quad i = \overline{p, p+k(p)-1}. \tag{10}$$

При виконанні цієї умови, функції $\varphi_i(y)$ для $i = \overline{p, p+k(p)-1}$ в (4) можуть бути взяті довільно, але, підставляючи в (10) значення $a_{ij} = \int_{D_2} \omega_j(t)\,\varphi_i(t)\,dt$, для визначення $\varphi_i(y)$ одержуємо інтегральні рівняння першого роду

$$-f_i^{(1)}(y) = \int_{D_2} N(y,t)\,\varphi_i(t)\,dt, \quad i = \overline{p, p+k(p)-1}. \tag{11}$$

Оскільки в розглядуваному випадку нуль не є власним значенням оператора $N$, то необхідними і достатніми умовами існування розв'язків рівняння (11) є умови

$$\sum_j \left[\frac{1}{\beta_j}\left(f_i^{(1)}(y), \omega_j(y)\right)_2\right]^2 = \sum_j \left(\frac{f_{ij}}{\beta_j}\right)^2 < +\infty, \quad i = \overline{p, p+k(p)-1}. \tag{12}$$

Для згаданих значень індекса $i$ $\varphi_i(y)$ і $a_{ij}$ визначаються так:

$$\varphi_i(y) = -\sum_j \frac{1}{\beta_j}\,\omega_j(y)\,f_{ij}, \quad a_{ij} = -\frac{f_{ij}}{\beta_j}.$$

Після деяких перетворень розв'язок рівняння (2) в розглядуваному випадку запишемо так:

$$u(x,y) = \frac{1}{\alpha_p}\left[f(x,y) + R_1^{(p)}(\alpha_p) f + R_2(\alpha_p) f + R^{(p)}(\alpha_p) f\right] + H_1(\alpha_p) f.$$

Тут

$$H_1(\alpha_p) f = \sum_{i=p}^{p+k(p)-1} \sum_j \frac{v_i(x)\,\omega_j(y)}{(\beta_j - \alpha_p)\,\beta_j} \int_{D_1}\int_{D_2} \overline{v_i(s)}\,\overline{\omega_j(t)}\, f(s,t)\,ds\,dt,$$

$R_1^{(p)}(\alpha_p)$, $R^{(p)}(\alpha_p)$ — інтегральні оператори з ядрами відповідно $R_1^{(p)}(x, s|\alpha_p)$, $R^{(p)}(x, y, s, t|\alpha_p)$, які є сумами рядів (7), (8) із сумуванням, яке не поширюється на значення індексу $i = \overline{p, p+k(p)-1}$. Аналогічні міркування проводяться і у випадку, коли справджується $(\bar{A})$ і $\lambda$ дорівнює власному числу $\beta_q$ оператора $N$. Умова (12) заміниться такою:

$$\sum_i \left(\frac{f_{ij}}{\alpha_i}\right)^2 < +\infty, \quad j = \overline{q, q+n(q)-1}. \tag{13}$$

У випадку б) рівняння (2) некоректно розв'язне, оскільки функції $\varphi_i(y)$, $i = \overline{p, p+k(p)-1}$, знаходяться із рівнянь першого роду (11).

Отже, вірна така теорема.

Т е о р е м а 1. *Нехай $\lambda$ не власне значення оператора $T$. Тоді рівняння* (2) *розв'язне однозначно і при цьому*: 1) *якщо $\lambda$ не власне значення оператора $K$ і $N$, то рівняння* (2) *коректне і нормально розв'язне*: 2) *якщо $\lambda$ — власне число оператора $K$ або $N$, то рівняння* (2) *розв'язне некоректно і ненормаль-*

*но. Необхідними і достатніми умовами розв'язності є умови збіжності типу* (12) *чи* (13).

**3.** Нехай тепер $\lambda$ — власне значення оператора $T$. Як показано в [3], це можливо у випадках: в) справджується $(A)$, $(\bar{B})$, наприклад $\lambda=\alpha_p+\beta_q$, при цьому власні функції оператора $T$ мають вигляд $v_i(x)\,\omega_j(y)$, $i=\overline{p, p+k(p)-1}$, $j=\overline{q, q+n(q)-1}$;

г) справджується $(\bar{A})$ і $(B)$, наприклад $\lambda$ дорівнює власному числу $\alpha_p$ оператора $K$, але при цьому обов'язково нуль є власним значенням оператора $N$, а власні функції оператора $T$ мають вигляд $v_i(x)\,\omega_j^0(y)$, $i=\overline{p, p+k(p)-1}$.

У випадку в) для сумісності системи (6) необхідно і достатньо, щоб

$$f_{ij}=\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_2} f(x, y)\,\overline{v_i(x)}\,\overline{\omega_j(y)}\,dxdy=0,\ \ i=\overline{p, p+k(p)-1},\ \ j=\overline{q, q+n(q)-1}. \tag{14}$$

При виконанні (14) для зазначених пар значень індексів сталі $a_{ij}$ можна вибрати довільно, всі решта $a_{ij}$ обчислюються однозначно. Визначаючи далі $\varphi_i(y)$ і $\psi_j(x)$, остаточно знаходимо

$$u(x, y)=\frac{1}{\alpha_p+\beta_q}\,[f(x, y)+R_1(\alpha_p+\beta_q)\,f+R_2(\alpha_p+\beta_q)\,f+$$

$$+R^{(p,q)}(\alpha_p+\beta_q)\,f]+\sum_{i=p}^{p+k(p)-1}\sum_{j=q}^{q+n(q)-1} a_{ij}v_i(x)\,\omega_j(y),$$

де $a_{ij}$ — довільні сталі. Тут $R^{(p,q)}$ означає оператор з ядром $R^{(p,q)}(x, y, s, t\,|\,\alpha_p+\beta_q)$, який є сумою ряду (8) із сумуванням, що не поширюється на пари значень індексів $(i, j)$, в яких одночасно $i=\overline{p, p+k(p)-1}$, $j=\overline{q, q+n(q)-1}$.

У випадку г), як і у випадку б), необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (4) є умова (10), що приводить до інтегральних рівнянь першого роду (11). Але у випадку г) нуль є власним значенням оператора $N$, а тоді, як відомо, необхідно і достатньо для розв'язності рівняння (11) виконання двох умов: умови (12), а також умови ортогональності $f_i^{(1)}(y)$ нуль-простору оператора $N$, звідки

$$\int\limits_{D_2}\overline{\omega_j^0(y)}\,f_i^{(1)}(y)\,dy=\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_2}\overline{v_i(x)}\,\overline{\omega_j^{(0)}(y)}\,f(x, y)\,dxdy=0 \tag{15}$$

для $i=\overline{p, p+k(p)-1}$ і всіх $j$. Отже, функція $f(x, y)$ повинна бути ортогональною до всіх власних функцій оператора $T$, що відповідають власному числу $\lambda=\alpha_p$.

При виконанні умов (12), (15) рівняння (11) мають розв'язки

$$\varphi_i(y)=\sum_j c_{ij}\omega_j^0(y)+\sum_j\frac{\omega_j(y)}{\beta_j}\,f_{ij},\quad i=\overline{p, p+k(p)-1},$$

де $c_{ij}$ — довільні сталі. Всі решта $\varphi_i(y)$ і $\psi_j(x)$ визначають із рівняння (4), (5) однозначно і в результаті нескладних перетворень одержуємо розв'язок рівняння (2) у вигляді

$$u(x, y)=\frac{1}{\alpha_p}\,[f(x, y)+R_1^{(p)}(\alpha_p)\,f+R_2(\alpha_p)\,f+R^{(p,0)}(\alpha_p)\,f]+$$

$$+ H_1(\alpha_p) f + \sum_{i=p}^{p+k(p)-1} \sum_j c_{ij} v_i(x) \omega_j^0(y).$$

Аналогічний результат має місце, якщо $\lambda = \beta_q$. При цьому умови (15) заміняться на умови

$$(f(x, y), v_i^0(x) \omega_j(y))_{12} = 0. \tag{16}$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай $\lambda$ — власне значення оператора $T$. Тоді рівняння* (2) *розв'язне неоднозначно і при цьому*: 1) *якщо $\lambda$ не власне число операторів $K$ і $N$, то рівняння* (2) *розв'язне нормально, необхідними і достатніми умовами розв'язності є умови ортогональності* (15) *або* (16); 2) *якщо $\lambda$ — власне число для $K$ і $N$, то рівняння* (2) *розв'язне ненормально і некоректно, необхідними і достатніми умовами розв'язності є умови збіжності* (12) *або* (13) *і умови ортогональності* (15) *або* (16).

## ЛІТЕРАТУРА


1. В. А. Какичев, Н. В. Коваленко, К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами.— УМЖ, 1973, т. 5, № 3.
2. Л. М. Лихтарников, Спектр одного класса линейных интегральных уравнений с двумя параметрами.— В кн.: Материалы третьей научной конференции по математике и механике, изд. Томского университета, 1973, вып. 1.
3. Л. М. Лихтарников, Л. З. Витова, О спектре интегрального оператора с частными интегралами.— Литовский матем. сб., 1975, т. 15, № 2.



Новгородський педагогічний інститут



Надійшла до редакції 5.V 1974 р.,
після переробки — 16.VI 1975 р.