УДК 517.52

К. М. Сліпенчук

Абсолютна сумовність подвійних рядів матричними методами і теореми тауберового типу для цих методів

В цій роботі узагальнюється одна теорема тауберового типу на випадок абсолютної сумовності подвійних рядів [1].

Подвійну послідовність $\{S_{mn}\}$ називатимемо абсолютно збіжною, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |\Delta S_{kl}| < \infty, \quad \Delta S_{kl} = S_{kl} - S_{k-1l} - S_{kl-1} + S_{k-1l-1}.$$

Надалі писатимемо $S_{mn} = \theta(1)$, якщо $\{S_{mn}\}$ абсолютно збігається до нуля і $S_{mn} = \Theta(1)$, якщо $\{S_{mn}\}$ абсолютно збігається.

Перетворимо подвійний числовий ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} u_{kl}, \tag{1}$$

частинні суми якого S_{mn}, за допомогою матриці $C = \| c_{kl}^{(mn)} \|$ так:

$$C_{mn} = \sum_{k,l=}^{\infty} c_{kl}^{(mn)} S_{kl}.$$

Подвійний ряд (1) $|C|$-сумовний, якщо $C_{mn} = \Theta(1)$. Мають місце такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* $B_{mn} = \sum\limits_{k,l=1}^{\infty} d_{mk} f_{nl} u_{kl}$ *і нехай*

$$1)\quad \sum_{m=1}^{\infty} |\overline{\Delta} d_{mk}| = O(1), \quad \overline{\Delta} d_{mk} = d_{mk} - d_{m-1k};$$

$$2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\Delta} f_{nl}| = O(1), \quad \overline{\Delta} f_{nl} = f_{nl} - f_{n-1l}.$$

Якщо при цьому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{\infty} |u_{kl}| < \infty$, *то* $B_{mn} = \Theta(1)$.

Доведення. Нехай умови теореми виконані. В цьому випадку

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} |\Delta B_{mn}| \leqslant \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\Delta} d_{mk}| \sum_{l=1}^{\infty} |\overline{\Delta} f_{nl}| |u_{kl}| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |u_{kl}| \sum_{m=1}^{M} |\overline{\Delta} d_{mk}| \sum_{n=1}^{N} |\overline{\Delta} f_{nl}| = O(1),$$

звідки і випливає твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай* $c_{kl}^{(mn)} = a_{mk} b_{nl}$, *де матриці* $A = \| a_{mk} \|$ *і* $B = \| b_{nl} \|$ *є* $|T|$*-матрицями* [2]. *Якщо при цьому* $S_{mn} = \Theta(1)$, *то* $C_{mn} = \Theta(1)$.

Доведення. Якщо покласти

$$\delta_{mk} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}, \quad \mu_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} b_{ni}$$

і застосувати перетворення Харді, то

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \delta_{mk} \mu_{nl} u_{kl} = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} a_{mk} b_{nl} S_{kl} +$$

$$+ S_{MN} \delta_{mM} \mu_{nN} + \mu_{nN} \sum_{k=1}^{M-1} a_{mk} S_{kN} + \delta_{mM} \sum_{l=1}^{M-1} b_{nl} S_{Ml}.$$

Нехай умови теореми виконані. Тоді $S_{mn} = O(1)$ і $\mu_{nN} \to 0$, $N \to \infty$, $\delta_{mM} \to 0$, $M \to \infty$. В такому випадку

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \delta_{mk}\mu_{nl}u_{kl} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{mk}b_{nl}S_{kl} = C_{mn}.$$

Залишилось застосувати теорему 1 до матриці $\| \delta_{mk}\mu_{nl} \|$.

Нехай $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n \uparrow \infty$. Позначимо через $|(A, \lambda)|$ $|A|$-метод, для якого

3) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |\overline{\Delta} A_{mk}| = O(1)$, де

$$A_{mk} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi} \sum_{j=k}^{i} \frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_j} - \sum_{i=k}^{m} \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}, \quad \Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i,$$

якщо при цьому ряд в правій частині збігається, а остання сума при $k \geqslant m + 1$ дорівнює нулю і

4) $\lambda_{p+1} \sum\limits_{k=p}^{\infty} a_{mk} = O_m(1), \quad p \to \infty.$

Нехай $\gamma_0 = 0$, $\gamma_n \uparrow \infty$. Позначимо через $|(B, \gamma)|$ $|B|$-метод, для якого

5) $\sum\limits_{l=1}^{\infty} |\overline{\Delta} B_{nl}| = O(1)$, де

$$B_{nl} = \sum_{i=l}^{\infty} b_{ni} \sum_{j=l}^{i} \frac{\Delta\gamma_j}{\gamma_j} - \sum_{i=l}^{n} \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}, \quad \Delta\gamma_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i,$$

якщо при цьому ряд в правій частині збігається, а остання сума при $l \geqslant n + 1$ дорівнює нулю і

6) $\gamma_{p+1} \sum\limits_{k=p}^{\infty} b_{nk} = O_n(1), \quad p \to \infty.$

$|C|$-метод, для якого матриці A і B є відповідно $|(A, \lambda)|$-і $|(B, \gamma)|$-методами, позначатимемо через $|(C, \lambda, \gamma)|$.

Т е о р е м а 3. *Якщо подвійний ряд* (1), *для якого збігаються ряди*

7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{mk}S_{kl}, \quad m, l = 1, 2, \ldots, \sum\limits_{l=1}^{\infty} b_{nl}S_{kl}, \quad n, k = 1, 2, \ldots,$

$(C, \lambda, \gamma)|$-*сумовний, то умови*

8) $p_{mn} = \dfrac{1}{\lambda_{m+1}} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{l=0}^{n} \lambda_k u_{kl} = \theta(1)$; 9) $q_{mn} = \dfrac{1}{\gamma_{n+1}} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{l=0}^{n} \gamma_l u_{kl} = \theta(1)$;

10) $r_{mn} = \dfrac{1}{\lambda_{m+1}\gamma_{n+1}} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{l=0}^{n} \lambda_k\gamma_l u_{kl} = \theta(1)$

є необхідними і достатніми для його абсолютної збіжності.

Доведення. Достатність. Нехай для $m, n = 1, 2, \ldots$

$$H_{mn} = \frac{1}{\lambda_{m+1}\gamma_{n+1}} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \Delta\lambda_k \Delta\gamma_l S_{kl} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{m+1}}\right)\left(1 - \frac{\gamma_l}{\gamma_{n+1}}\right) u_{kl},$$

$$H_{m0} = H_{0n} = H_{00} = 0.$$

Легко бачити, що

$$S_{mn} - H_{mn} = p_{mn} + q_{mn} - r_{mn} = v_{mn}. \qquad (2)$$

В такому випадку

$$\sigma_{mn} = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{mk} b_{nl} H_{kl} = C_{mn} - \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{mk} b_{nl} v_{kl} = C_{mn} - \sigma_{mn}^{(1)}.$$

Оскільки $v_{kl} = \theta(1)$, то, в силу теореми 2, $\sigma_{mn}^{(1)} = \Theta(1)$, а отже, $\sigma_{mn} = \Theta(1)$. Далі, оскільки

$$H_{mi} - H_{mi-1} = \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}(q_{mi} - r_{mi}) = \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i} u_{mi}^{(1)},$$

$$H_{il} - H_{i-1l} = \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}(p_{il} - r_{il}) = \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} u_{il}^{(1)},$$

то

$$H_{mn} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i} u_{mi}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i} \sum_{j=1}^{i} \bar{\bar{\Delta}} u_{mj}^{(1)},$$

$$H_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} u_{in}^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{i} \bar{\bar{\Delta}} u_{jn}^{(2)},$$

де $\bar{\bar{\Delta}} u_{mj}^{(1)} = u_{mj}^{(1)} - u_{mj-1}^{(1)}$.

Разом з тим зауважимо, що $u_{mn}^{(1)} = \theta(1)$, $u_{mn}^{(2)} = \theta(1)$. Покладемо тепер

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} = 1 + \rho_m; \quad \sum_{l=1}^{\infty} b_{nl} = 1 + \pi_n; \quad R_{mn} = (1 + \rho_m)(1 + \pi_n).$$

В цьому випадку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{mk}}{1 + \rho_m} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{mk} = 1; \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_{nl}}{1 + \pi_n} = \sum_{l=1}^{\infty} b'_{nl} = 1,$$

а, отже,

$$\frac{1}{R_{mn}}(\sigma_{mn} - H_{mn}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a'_{mk} b'_{nl}\left(H_{kl} - \frac{H_{mn}}{R_{mn}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a'_{mk} b'_{nl}\left(\frac{H_{ml}}{1 + \rho_m} - \frac{H_{mn}}{R_{mn}} + H_{kl} - \frac{H_{ml}}{1 + \rho_m}\right) =$$

$$=\frac{1}{R_{mn}}\left[\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}H_{ml}-H_{mn}\right)+\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}H_{kl}-H_{ml}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{R_{mn}}\left[\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}\sum_{i=1}^{l}\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_i}\sum_{j=1}^{i}\overline{\overline{\Delta}}u_{mj}^{(1)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}\sum_{j=1}^{i}\overline{\overline{\Delta}}u_{mj}^{(1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{i}\overline{\Delta}u_{jl}^{(2)}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{i}\overline{\Delta}u_{jl}^{(2)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{R_{mn}}\left(\sigma_{mn}^{(2)}+\sum_{l=1}^{\infty} b_{nl}\bar{\sigma}_{ml}\right)=\frac{1}{R_{mn}}(\sigma_{mn}^{(2)}+\sigma_{mn}^{(3)}),$$

звідки

$$H_{mn}=\sigma_{mn}-\sigma_{mn}^{(2)}-\sigma_{mn}^{(3)}. \qquad (3)$$

Покажемо, що $\sigma_{mn}^{(2)}=\Theta(1)$, $\sigma_{mn}^{(3)}=\Theta(1)$. З цією метою покладемо

$$\mu'_{nl}=\sum_{i=l}^{\infty} b_{ni}\sum_{j=l}^{i}\frac{\Delta\gamma_j}{\gamma_j},\quad \delta'_{mk}=\sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}\sum_{j=k}^{i}\frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_j}.$$

Тоді, якщо скористатись перетворенням Абеля,

$$\sum_{l=1}^{p+1}\mu'_{nl}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}=\sum_{l=1}^{p}\mu_{nl}\frac{\Delta\gamma_l}{\Delta_l}\sum_{i=1}^{l}\overline{\overline{\Delta}}u_{mi}^{(1)}+\mu'_{np+1}\sum_{i=1}^{p+1}\overline{\overline{\Delta}}u_{mi}^{(1)},$$

$$\sum_{l=1}^{p}\mu_{nl}\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_l}\sum_{i=1}^{l}\overline{\overline{\Delta}}u_{mi}^{(1)}=\sum_{l=1}^{p-1} b_{nl}\sum_{i=1}^{l}\frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}\sum_{j=1}^{i}\overline{\overline{\Delta}}u_{mj}^{(1)}+\mu_{np}\sum_{l=1}^{p}\frac{\Delta\gamma_l}{\gamma_l}\sum_{i=1}^{l}\overline{\overline{\Delta}}u_{mi}^{(1)}.$$

Отже,

$$\sigma_{mn}^{(2)}=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{p+1}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}\mu'_{nl}-\mu'_{np+1}\sum_{i=1}^{p+1}\overline{\overline{\Delta}}u_{mi}^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\gamma_{p+1}\mu_{np}\frac{1}{\gamma_{p+1}}\sum_{l=1}^{p}\Delta\gamma_l\frac{u_{ml}^{(1)}}{\gamma_l}\right)-\sum_{l=1}^{n}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}\sum_{i=l}^{n}\frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}\sum_{i=l}^{\infty} b_{ni}\sum_{j=l}^{i}\frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}-\sum_{l=1}^{n}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}\sum_{i=l}^{n}\frac{\Delta\gamma_i}{\gamma_i}=\sum_{l=1}^{\infty}B_{nl}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}.$$

В такому випадку

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|\Delta\sigma_{mn}^{(2)}|=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left|\Delta\sum_{l=1}^{\infty}B_{nl}\overline{\overline{\Delta}}u_{ml}^{(1)}\right|\leqslant\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}|\overline{\Delta}B_{nl}||\Delta u_{ml}^{(1)}|=O(1).$$

Як і вище, покажемо, що

$$\bar{\sigma}_{ml}=\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\overline{\Delta}u_{kl}^{(2)}.$$

Крім того,

$$\sum_{l=1}^{N}\mu_{nl}\Delta u_{kl}^{(2)}=\sum_{l=1}^{N-1}b_{nl}\overline{\Delta}u_{kl}^{(2)}+\mu_{nN}\overline{\Delta}u_{kN}^{(2)},$$

а, отже,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{nl}\Delta u_{kl}^{(2)}=\sum_{l=1}^{\infty}b_{nl}\overline{\Delta}u_{kl}^{(2)}.$$

В цьому випадку $\sigma_{mn}^{(3)}=\sum_{k,l=1}^{\infty}A_{mk}\mu_{nl}\Delta u_{kl}^{(2)}$, звідки, якщо скористатись теоремою 1, $\sigma_{mn}^{(3)}=\Theta(1)$. А тоді, як видно з (3), $H_{mn}=\Theta(1)$, звідки, в силу (2) $S_{mn}=\Theta(1)$.

Необхідність. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|u_{kl}|<\infty$. В такому випадку, як показано в [3], $p_{mn}=O(1)$ і, крім того,

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|\Delta p_{mn}|\leqslant\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|u_{mn}|+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{m}\lambda_k|u_{kn}|\left(\frac{1}{\lambda_m}-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|u_{mn}|+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|u_{mn}|\lambda_m\sum_{k=m}^{M}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\leqslant 2\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|u_{mn}|=O(1).$$

Отже, $p_{mn}=\theta(1)$. Аналогічно покажемо, що $q_{mn}=\theta(1)$, $r_{mn}=\theta(1)$.

Ряд (1) $|B|$-сумовний, якщо функція

$$f(x,y)=e^{-x}e^{-y}\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{x^k y^l}{k!l!}S_{kl}\qquad(4)$$

є функцією обмеженої варіації на $[0<x<\infty,\ 0<y<\infty]$.

Теорема 4. *Якщо подвійний ряд* (1), *для якого збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-m}\frac{m^k}{k!}S_{kl},\quad m,l=1,2,\ldots;\quad \sum_{l=1}^{\infty}e^{-n}\frac{n^l}{l!}S_{kl},\quad n,k=1,2,\ldots,$$

$|B|$ *-сумовний, то умови*

$$11)\ \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}ku_{kl}=\theta(1);\quad 12)\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}lu_{kl}=\theta(1);$$

$$13)\ \frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}klu_{kl}=\theta(1)$$

є необхідними і достатніми для його абсолютної збіжності.

Доведення. Нехай умови теореми виконані. Покладемо в (4) $x=m$, $y=n$. Тоді

$$f(x_m,y_n)=C_{mn}=e^{-m}e^{-n}\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{m^k n^l}{k!l!}S_{kl}=\Theta(1).$$

Розглянемо матрицю

$$C = \left\| e^{-m} e^{-n} \frac{m^k n^l}{k! l!} \right\|, \quad A = \left\| e^{-m} \frac{m^k}{k!} \right\|, \quad B = \left\| e^{-n} \frac{n^l}{l!} \right\|.$$

В роботі [1] показано, що A-метод є $|(A, m)|$-методом $(\lambda_m = m)$, а отже, B-метод також є $|(B, n)|$-методом $(\gamma_n = n)$. В такому випадку C-метод є $|(C, m, n)|$-методом. Залишилось застосувати теорему 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. К. М. Слепенчук, Одна общая теорема тауберова типа для абсолютной суммируемости рядов и ее применение к методу Бореля. — Изв. вузов, Матем., 1969, № 3.
2. F. M. Mears, Absolute Regularity and the Nörlund Mean, Ann. Math., (2), 38, 1937, 594—601.
3. К. М. Слепенчук, Теоремы тауберова типа для некоторых методов суммирования двойных рядов. — Изв. вузов, Матем., 1964, № 6.

Дніпропетровський державний університет

Надійшла до редакції 8.VII 1974 р.