УДК 517.9

А. Азамов

Построение нормальной фундаментальной системы решений уравнения второго порядка в одном частном случае

В работе строится нормальная фундаментальная система решений уравнения

$$\ddot{x} = p(t)\,x \tag{1}$$

при следующих предположениях.

А. $p(t)$ — кусочно-непрерывна, ограничена и неотрицательна на интервале $[0, +\infty)$ (если $p(t) \leqslant 0$, то легко показать, что характеристические показатели системы (1) равны нулю).

Б. Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= p(t)\,x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

правильна по Ляпунову.

В. Показатели системы (2) отличны от нуля.

Из этих предположений следует, что спектр системы (2) имеет вид $\{-\alpha, \alpha\}$, где $\alpha > 0$, и показатели всех ее нетривиальных решений точны (см. [1 — 3]).

Лемма 1. *Если* $x_1(t)$, $x_2(t)$ — *решение* (2), *то*

$$\chi[x_1] = \chi[x_2] = \check{\chi}[(x_1, x_2)].$$

Доказательство. Пусть $\check{\chi}[(x_1, x_2)] > 0$. Тогда $\chi[x_1] \geqslant 0$ и $\chi[x_2] \geqslant 0$. В самом деле, если, например, $\chi[x_1] < 0$, то $\chi[px_1] \leqslant \chi[p] + \chi[x_1] < 0$. Поэтому из представления $x_2 = c + \int\limits_{+\infty}^{t} p(\tau)\,x_1(\tau)\,d\tau$ следует $\chi[x_2] \leqslant 0$, чего не может быть.

Таким образом $\chi[x_1] = \chi\left[\int\limits_{+\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau\right] \leqslant \chi[x_2]$ и аналогично $\chi[x_2] \leqslant \chi[x_1]$. Лемма 1 доказана.

Эта лемма позволяет (при предположениях А, Б, В) говорить о показателе решений уравнения (1) вместо показателей решений системы (2). (При этом, конечно, нет уверенности в точности показателей.) Например, линейно независимые решения (x_1, x_2) и (y_1, y_2) нормальны тогда и только тогда, когда

$$\chi[x_1] + \chi[x_2] = 0.$$

Л е м м а 2. *Нормированная фундаментальная система решений уравнения* (1) *не нормальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t)$ такое решение, что $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$. Тогда $\chi[x]=\alpha>0$. В самом деле, из предположения А следует, что каждое решение уравнения (1) имеет не более одного нуля. Следовательно, $x(t)>0$ при $t>0$. Это влечет, что $x(t)$ — монотонно возрастающая, поэтому его показатель не может равняться $-\alpha$.

Пусть $y(t)$ — решение с начальными условиями $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$. Предположим, что

$$\chi[y]=-\alpha. \tag{3}$$

Тогда $y(t)>0$. В самом деле, если t_1 — наименьшее значение t, для которого $y(t)=0$, то $\dot{y}(t_1)<0$, поэтому $y(t)<0$ и $\dot{y}(t)=\dot{y}(t_1)+\int\limits_{t_1}^{t} p(\tau)y(\tau)\,d\tau>0$ при $t\geqslant t_1$. Отсюда следует, что $y(t)$ не может стремиться к нулю, тем более не может иметь отрицательного показателя.

Таким образом, если $t_0>0$, то $x(t)>0$ и $y(t)>0$ при $t\geqslant t_0$. Далее

$$y(t)=x(t)\left[\frac{y(t_0)}{x(t_0)}+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)}\right]\geqslant x(t)\left[c+\int\limits_{+\infty}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)+\dot{x}^2(\tau)}\right],$$

где

$$c=\frac{y(t_0)}{x(t_0)}+\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{d\tau}{x^2(\tau)+\dot{x}^2(\tau)}>0.$$

Легко показать, что из $\varphi(t)\to c\neq 0$ при $t\to+\infty$ следует $\check{\chi}[\varphi]=0$. Вследствие этого

$$\chi[y]\geqslant\chi\left[x\left(c+\int\limits_{+\infty}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)+\dot{x}^2(\tau)}\right)\right]=\chi[x]=\alpha>0$$

вопреки предположению (3). Следовательно $\chi[y]=\alpha$. Лемма 2 доказана.

Для построения нормальной фундаментальной системы решений берем решение $x(t)$, удовл творяющее начальным условиям $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ и с последующим сужением области определения на $[t_0,+\infty)$, где $t_0>0$. Из изложенного следует, что $x(t)>0$. Пользуясь неотрицательностью $p(t)$, легко показать, что $\int\limits_{+\infty}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)}$ сходится, поэтому для второго решения имеет смысл представление

$$y(t)=x(t)\left[c_1\int\limits_{+\infty}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)}+c_2\right],\quad c_1\neq 0.$$

Если $c_2\neq 0$, то, ввиду того, что $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{+\infty}^{t}\frac{d\tau}{x^2(\tau)}=0$, имеем $\chi[y]=\chi[x]$, так что фундаментальная система решений (y, x) не нормальна. Но решение $x(t)$ может быть включено в нормальную фундаментальную систему решений, то решение с отрицательным показателем надо искать среди тех решений, для которых $c_2 = 0$. Но все решения вида $c_1 x \int\limits_{+\infty}^{t} \frac{d\tau}{x^2(\tau)}$ обладают одним и тем же показателем, и этот показатель равен $-\alpha$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия* А, Б, В, *то фундаментальная система решений уравнения* (1), *состоящая из решений*: $x(t)$ *с начальными условиями* $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ и $y(t)=x(t)\int\limits_{+\infty}^{t} \frac{d\tau}{x^2(\tau)}$ $(t \geqslant t_0 > 0)$, *нормальна.*

В заключение выражаю свою благодарность Б. П. Демидовичу за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Э. Виноград, Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем, УМН, 1954, т. 9, вып. 2(60).
2. Б. Ф. Былов и др., Теория показателей Ляпунова, «Наука», М., 1966.
3. Б. П. Демидович, Лекция по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.

Ташкентский государственный университет

Поступила в редакцию 9.IV 1973 г.