УДК 517.948.34

В. Г. Тарасов

Задача рассеяния для уравнения переноса

В настоящее время имеется довольно развитая абстрактная теория рассеяния (см. [1—4]), дающая критерий существования оператора рассеяния для довольно широкого класса уравнений.

В этой работе задача рассеяния для одного интегро-дифференциального уравнения теории переноса решается без привлечения общих теорем абстрактной теории рассеяния. Построения, проводящиеся здесь, представляют некоторый самостоятельный интерес и необходимы при решении обратной задачи рассеяния.

В теории переноса (см. [5—7]) важную роль играет интегро-дифференциальный оператор

$$Bu(x, \nu) = i\nu \operatorname{grad} u(x, \nu) + \int_{\Omega} d\mu V(x, \nu, \mu)\, u(x, \mu), \tag{1}$$

определенный на функциях $u(x, \nu)$, описывающих поток частиц, летящих в направлении $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $|\nu| = 1$, из точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ трехмерного пространства E_3.

Через Ω обозначаем поверхность единичной сферы в E_3, а $d\mu$ обозначает элемент поверхности этой сферы.

Везде в этой работе будем предполагать, что $V(x, \nu, \mu)$ — непрерывная функция всех своих переменных, обладает свойством эрмитовой симметрии $V(x, \nu, \mu) = \bar{V}(x, \mu, \nu)$ и, равномерно по ν, μ, допускает оценку

$$|V(x, \nu, \mu)| \leqslant \frac{c}{(1 + |x|)^{3+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0). \tag{2}$$

Рассмотрим пространства функций $\Phi = C(E_3) \times L_2(\Omega)$ и $L_2 = L_2(E_3) \times L_2(\Omega)$ с нормами

$$\| u(x, \nu) \|_{\Phi} = \sup_{x \in E_3} \left\{ \int_{\Omega} |u(x, \nu)|^2 d\nu \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad \| u(x, \nu) \|_{L_2} = \left\{ \int_{E_3} dx \int_{\Omega} |u(x, \nu)|^2 d\nu \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Легко показать, что оператор B с областью определения $D(B) = C_0^\infty(E_3) \times L_2(\Omega)$ существенно самосопряжен в L_2, т. е. его замыкание (которое будет обозначаться также через B) является самосопряженным оператором.

В данной работе будет рассматриваться уравнение переноса вида

$$Bu = \lambda u \qquad (\lambda \text{ — вещественный параметр}). \tag{3}$$

Если $V(x, \nu, \mu) \equiv 0$, то однородное уравнение (3) имеет решение $u(x, \nu) = \varphi(x_\perp, \nu) e^{-i\lambda\nu x}$, где $x_\perp$ обозначает ортогональную составляющую вектора x к направлению ν, т. е. $x_\perp = x - \nu(\nu x)$.

Задача рассеяния для уравнения переноса (3) ставится так: требуется найти решение $u(x, \nu) \in \Phi$ уравнения (3), для которого

$$u(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x} a(x_\perp, \nu) + o(1), \quad \nu x \to -\infty. \tag{4}$$

Функция $a(x_\perp, \nu)$ предполагается заданной и определяет поток частиц, приходящий с бесконечности (падающий поток).

Основной результат данной работы состоит в доказательстве разрешимости этой задачи. Схема доказательств аналогична схеме Повзнера [8] исследования задачи рассеяния для уравнения Шредингера. Она заключается в сведении задачи рассеяния к эквивалентному интегральному уравнению и исследованию его разрешимости. Эта схема осуществляется в следующих леммах.

Лемма 1. *Задача рассеяния* (3), (4) *для уравнения переноса эквивалентна задаче нахождения решений уравнения*

$$u(x, \nu) = u_0(x, \nu) + Ku(x, \nu) \tag{5}$$

в пространстве Φ. *Здесь* K *обозначает интегральный оператор*

$$Kg(x, \nu) = -\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{0} ds \int_{\Omega} d\mu e^{i\lambda s} V(x + \nu s, \nu, \mu)\, g(x + \nu s, \mu), \tag{6}$$

а $u_0(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x}(x_\perp, \nu)$.

Доказательство. Легко показать, что если правая часть уравнения

$$(i\nu\nabla - \lambda)\, v(x, \nu) = -\rho(x, \nu) \tag{7}$$

удовлетворяет оценке $|\rho(x, \nu)| \leqslant c(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, то решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $v(x, \nu) \to 0$ при $\nu x \to -\infty$, имеет вид

$$v(x, \nu) = -\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{0} ds e^{i\lambda s} \rho(x + \nu s, \nu). \tag{8}$$

Пусть $u(x, \nu)$ — решение задачи рассеяния (3), (4). Тогда $v(x, \nu) = u_0(x, \nu) - u(x, \nu) \to 0$ при $\nu x \to -\infty$ и удовлетворяет уравнению (7) с $\rho(x, \nu) = \int_\Omega d\mu V(x, \nu, \mu) u(x, \mu)$. Учитывая представление (8), получим, что $u(x, \nu)$ — решение интегрального уравнения (5).

Наоборот, легко проверить, что решение уравнения (5) из Φ удовлетворяет уравнению (3) и имеет требуемую асимптотику (4). Лемма доказана.

Таким образом, задача рассеяния (3), (4) для уравнения переноса свелась к интегральному уравнению (5).

Лемма 2. *Оператор B в L_2 не имеет вещественных собственных значений.*

Доказательство. Пусть $u(x, \nu) \in L_2$ — собственная функция оператора B с вещественным собственным значением λ. Покажем, что $u(x, \nu) \equiv 0$.

Легко показать, что если решение уравнения (3) $u(x, \nu) \in L_2$, то оно будет решением следующего интегрального уравнения:

$$u(x, \nu) = \varphi_0(x, \nu) - \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\alpha x} \frac{ds}{\alpha\nu} \int_\Omega d\mu e^{i\lambda \frac{s - \alpha x}{\alpha\nu}} V\left(x + \nu \frac{s - \alpha x}{\alpha\nu}, \nu, \mu\right) \times$$
$$\times u\left(x + \nu \frac{s - \alpha x}{\alpha\nu}, \mu\right). \tag{9}$$

Здесь α — некоторый фиксированный единичный вектор, а функция $\varphi_0(x, \nu)$ — решение однородного уравнения (3).

Уравнение (9) является вольтерровским в направлении α, и тогда методом последовательных приближений легко доказать существование и единственность решения уравнения (9) в пространстве L_2.

Учитывая, что $\varphi_0(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x} \varphi(x_\perp, \nu)$, из уравнения (9) имеем: $|\varphi(x_\perp, \nu)| = \lim_{\alpha x \to -\infty} |u(x, \nu)|$. Далее, если зафиксировать $x_\perp$, тогда из $\alpha x = (\alpha\nu)(\nu x) + (\alpha - \nu(\alpha\nu))(x - \nu(\nu x)) \to -\infty$ следует, что $(\alpha\nu)(\alpha x) \to -\infty$ $(\alpha\nu \neq 0)$. Так как $u(x, \nu) \in L_2$, то при любом фиксированном $x_\perp$ $\lim_{\alpha x \to -\infty} |u| = 0$, т. е. $\varphi(x_\perp, \nu) \equiv 0$. Поэтому $u(x, \nu)$ — решение однородного вольтерровского уравнения (9) и $u(x, \nu) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Уравнения $u = \pm Ku$ имеют в пространстве Φ только тривиальные решения $u \equiv 0$.*

Доказательство. Уравнение $u = -Ku$ изменением знака функции $V(x, \nu, \mu)$ сводится к уравнению $u = Ku$, поэтому достаточно рассмотреть только это уравнение.

Выведем некоторое вспомогательное тождество. Пусть $v(x, \nu)$ — решение уравнения (3), тогда $\bar{v}(x, \nu)$ будет решением уравнения $-i\nu\nabla\bar{v} - \lambda\bar{v} = \int_\Omega d\mu \bar{V}\bar{v}$. Умножая скалярно в $L_2(\Omega)$ это уравнение на $v(x, \nu)$, а уравнение (3) — на $\bar{v}(x, \nu)$ и вычитая из второго равенства первое, после интегрирования по области $|x| \leqslant r$ получаем

$$\int_\Omega d\nu \int_{|x| \leqslant r} dx |\nu\nabla |v|^2] = 0. \tag{10}$$

Переходя в (10) к поверхностному интегралу, получим

$$\int_\Omega d\nu \int_{|x|=r} \frac{\nu x}{r} |v|^2 dS_x = 0$$

или

$$\int_\Omega d\nu \int_{\substack{|x|=r\\ \nu x\geqslant 0}} \frac{|\nu x|}{r} |v|^2 dS_x - \int_\Omega d\nu \int_{\substack{|x|=r\\ \nu x<0}} \frac{|\nu x|}{r} |v|^2 dS_x = 0. \tag{11}$$

В последнем выражении перейдем от интегрирования по полусферам к интегрированию по кругу, который их разделяет. Тогда из (11) получим

$$\int_\Omega d\nu \int_{|x_\perp|\leqslant r} |v(x_\perp + \nu\sqrt{r^2-|x_\perp|^2}, \nu)|^2 dx_\perp - \int_\Omega d\nu \int_{|x_\perp|\leqslant r} |v(x_\perp -$$

$$- \nu\sqrt{r^2-|x_\perp|^2}, \nu)|^2 dx_\perp = 0. \tag{12}$$

Пусть теперь $u(x, \nu) \in \Phi$ — решение уравнения $u = Ku$, тогда, учитывая оценку (2), имеем

$$|u(x_\perp - \nu\sqrt{r^2-|x_\perp|^2}, \nu| \leqslant c \int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{(1+|x+\nu s|)^{3+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{(1+|x_\perp|+|-\sqrt{r^2-|x_\perp|^2}+s|)^{3+\varepsilon}} \leqslant c \int_{-\infty}^{0} \frac{ds}{(1+r-s)^{3+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{K}{(1+r)^{2+\varepsilon}}. \tag{13}$$

Далее, уравнение $u = Ku$ можно записать в виде

$$u(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x}\varphi(x_\perp, \nu) + \frac{1}{i}\int_0^\infty ds \int_\Omega d\mu e^{i\lambda s} V(x+\nu s, \nu, \mu)\, u(x+\nu s, \mu), \tag{14}$$

где $\varphi(x_\perp, \nu) = -\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_\Omega d\mu e^{i\lambda(s+\nu x)} V(x+\nu s, \nu, \mu)\, u(x+\nu s, \mu)$. Тогда из (14) легко получить оценку

$$|u(x_\perp + \nu\sqrt{r^2-|x_\perp|^2}, \nu)| \leqslant |\varphi(x_\perp, \nu)| + \frac{K}{(1+r)^{2+\varepsilon}}. \tag{15}$$

Подставляя оценки (13), (15) в тождество (12), получим

$$\lim_{r\to\infty} \int_\Omega d\nu \int_{|x_\perp|\leqslant r} dx_\perp |\varphi(x_\perp, \nu)|^2 = 0, \text{ т. е. } \varphi(x_\perp, \nu) \equiv 0.$$

Поэтому $u(x, \nu)$ — решение уравнения (3) и в силу (13), (15) $u(x, \nu) \in L_2$. Тогда по лемме 2 $u(x, \nu) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Оператор $H = K^2$ вполне непрерывный в пространстве Φ.*

Доказательство. Легко показать, что оператор H будет интегральным оператором с ядром $H(x, \nu, y, \mu)$.

$$Hu(x, \nu) = \int_{E_3} dy \int_\Omega d\mu H(x, \nu, y, \mu)\, u(y, \mu), \tag{16}$$

где

$$H(x, \nu, y, \mu) = -\int_0^\infty ds \frac{e^{-i\lambda|s-|y-x+\nu s||}}{|y-x+\nu s|^2} \times$$

$$\times V\left(x - \nu s, \nu, \frac{y - x + \nu s}{|y - x + \nu s|}\right) V\left(y, \frac{y - x + \nu s}{|y - x + \nu s|}, \mu\right). \tag{17}$$

Можно показать, что оператор H с ядром (17) ограничен в Φ.

Рассмотрим интегральный оператор H_N с ядром $\theta(N - |x|) H(x, \nu, y, \mu)$, где $H(x, \nu, y, \mu)$ — ядро оператора H. Тогда, в силу непрерывности $V(x, \nu, \mu)$ по всем переменным, оператор H_N вполне непрерывный и $\| H - H_N \| = \| \theta(|x| - N) H(x, \nu, y, \mu) \|_\Phi \to 0$ при $N \to \infty$. Отсюда следует, что оператор H вполне непрерывный. Лемма доказана.

Теорема. *Существует и единственно решение задачи рассеяния* (3), (4) *для уравнения переноса. Это решение при $\nu x \to +\infty$ имеет асимптотику*

$$u(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x} b(x_\perp, \nu) + o(1). \tag{18}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 разрешимость задачи рассеяния (3), (4) для уравнения переноса эквивалентна разрешимости интегрального уравнения (5). Так как оператор K^2 вполне непрерывный и каждое из уравнений $u = \pm Ku$ тривиально разрешимо в пространстве Φ, то существует и единственно решение уравнения (5) в пространстве Φ. Таким образом, однозначная разрешимость задачи рассеяния (3), (4) доказана.

Пусть $u(x, \nu)$ — решение задачи рассеяния (3), (4), тогда, если в уравнение (5) вместо $a(x_\perp, \nu)$ подставить выражение

$$a(x_\perp, \nu) = b(x_\perp, \nu) + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\lambda(s+\nu x)} \int_\Omega d\mu V(x + \nu s, \nu, \mu) u(x + \nu s, \mu),$$

получим

$$u(x, \nu) = e^{-i\lambda\nu x} b(x_\perp, \nu) + \frac{1}{i} \int_0^\infty ds \int_\Omega d\mu e^{i\lambda s} V(x + \nu s, \nu, \mu) u(x + \nu s, \mu).$$

Отсюда при $\nu x \to +\infty$ имеем асимптотику (18). Теорема доказана.

В силу этой теоремы каждая заданная функция $a(x_\perp, \nu)$, описывающая падающий поток, определяет однозначно функцию $b(x_\perp, \nu)$, описывающую рассеянный поток частиц. Таким образом, задан оператор рассеяния S, переводящий функцию $a(x_\perp, \nu)$ в $b(x_\perp, \nu)$, т. е. $b(x_\perp, \nu) = Sa(x_\perp, \nu)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. П. Нижнику за постановку задачи и помощь при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ш. Бирман, Об условиях существования волновых операторов, Изв. АН СССР, сер. мат., 1963, т. 27, № 4.
2. Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972.
3. К. Фридрихс, Возмущение операторов в гильбертовом пространстве, «Мир», М., 1969.
4. П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния, «Мир», М., 1971.
5. В. С. Владимиров, Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Труды математического ин-та АН СССР, 1961 т 61
6. Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М., 1961.
7. К. Кейз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса, «Мир», М., 1972.
8. А. Я. Повзнер, О разложении произвольной функции по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Мат. сб., 1953, т. 32(74), № 1

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 20.II 1975 г.