УДК 519.152

Г. І. Фалін

Групове надходження вимог в одноканальну систему з повторними викликами

Розглянемо одноканальну систему, в яку потрапляє стаціонарний потік без післядії. Як показано в [1], такий потік може бути описаний такою схемою (групове надходження вимог): моменти надходження заявок утворюють найпростіший потік; нехай λ його інтенсивність. В кожний момент надходження вимог з повною ймовірністю c_k надходить точно k вимог.

Нехай в систему надійшло k вимог. Якщо обслуговуючий пристрій вільний, одна вимога починає обслуговуватись, а решта утворюють $k-1$ джерело повторних викликів. Якщо ж канал зайнятий, число джерел збільшується на k.

Кожне з джерел посилає пуассонівський потік заявок інтенсивності μ. Якщо при надходженні повторного виклику система вільна, то цей виклик починає обслуговуватись, а число джерел зменшується на одиницю; якщо система зайнята, то її стан не змінюється.

Час обслуговування — довільний з функцією розподілу $B(t)$.

Ймовірність того, що в проміжку часу довжиною t надійде k вимог вхідного потоку, дорінює [2]

$$a_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} c_k^{n*},$$

де c_k^{n*} — n-кратна згортка послідовності $\{c_k\}$.

Ймовірність надходження за час обслуговування k первинних вимог є $\alpha_k = \int\limits_0^{\infty} a_k(t)\, dB(t)$.

Для твірних функцій одержимо

$$a(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k(t) = \exp\{-\lambda t[1 - zc(z)]\}, \quad \alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \alpha_k = \beta\{\lambda[1 - zc(z)]\}.$$

В цих формулах $c(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^{k-1}$ — твірна функція розподілу $\{c_k\}$, а $\beta(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dB(t)$ — перетворення Лапласа — Стілтьєса функції розподілу часу обслуговування.

Позначимо $\lambda_1 = \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} kc_k$ — інтенсивність надходження первинних викликів, $\rho = \lambda_1 \int\limits_0^{\infty} t dB(t)$ — завантаження.

Нехай в момент, коли систему залишила обслужена вимога, було n джерел; π_n — ймовірність цієї події.

Вимога, яка наступною надійде на обслуговування, з ймовірністю $\frac{n\mu}{\lambda + n\mu}$ буде повторною (при цьому число джерел стане $n - 1$), а з ймовірністю $\frac{\lambda}{\lambda + n\mu} c_k$ прийде в складі групи із k первинних викликів (число джерел збільшиться до $n + k - 1$).

До моменту, коли вона залишить систему, надійде іще деяка кількість первинних заявок; розподіл їх числа є $\{\alpha_k\}$. Всі вони, звичайно ж, створять джерела.

Отже, ймовірності переходу r_{nm} будуть

$$r_{nm} = \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \alpha_{m-n+1} + \sum_{k=1}^{m-n+1} \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} c_k \alpha_{m-n+1-k}.$$

В стаціонарному режимі

$$\pi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n r_{nm},$$

тобто

$$\pi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \left\{ \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \alpha_{m-n+1} + \sum_{k=1}^{m-n+1} \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} c_k \alpha_{m-n+1-k} \right\}. \qquad (1)$$

Зважаючи на наявність згорток послідовностей, візьмемо твірні функції обох частин рівності (1):

$$\mu [z - \alpha(z)] \frac{d\pi(z)}{dz} = \lambda [\alpha(z) c(z) - 1] \pi(z),$$

де

$$\pi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_m}{\lambda + m\mu} z^m.$$

Це лінійне диференціальне рівняння легко інтегрується

$$\pi(z) = K \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)} dx \right\},$$

K — стала інтегрування.

Якщо $P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m z^m$ звичайна степенева твірна функція, то

$$P(z) = \lambda \pi(z) + \mu z \frac{d\pi(z)}{dz} = \lambda K \frac{zc(z) - 1}{z - \alpha(z)} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)} dx \right\}.$$

При $z = 1$ зліва одержимо 1; значення виразу справа можна обчислити, застосовуючи правило Лопіталя. В результаті визначимо сталу K: $K = \frac{1-\rho}{\lambda_1}$. Остаточно,

$$\pi(z) = \frac{1-\rho}{\lambda_1} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)} dx \right\}. \qquad (2)$$

Нехай $p(i, n)$ — ймовірність того, що в довільний момент часу в стаціонарному стані в системі i вимог обслуговується і є n джерел, $i = 0, 1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Якщо в якийсь момент часу t канал вільний, то припустимо, що остання обслужена заявка пішла в момент t'. Очевидно, що в момент t' могло бути рівно стільки джерел, скільки їх було в момент t. Значить: $p(0, n) = \pi_n \int_0^{\infty} P$ {u одиниць часу тому систему залишила обслужена вимога} P {за час u не надійшло заявок} $du = \pi_n \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-(\lambda + n\mu)u} du = \frac{\lambda_1 \pi_n}{\lambda + n\mu}$.

Тому

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(0, n) = \lambda_1 \pi(z) = (1-\rho) \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)} dx \right\}.$$

При $z = 1$ ця формула дає ймовірність π того, що група первинних викликів, заставши систему зайнятою, утворює джерела повторних викликів: $\pi = \rho$.

Нехай тепер в якийсь момент часу канал зайнятий і є m джерел. Якщо вимога, яка обслуговується, надійшла на обслуговування T одиниць часу назад, то повторюючи майже дослівно відомі міркування Хінчина для однолінійної системи із сподіванням [3], одержимо, що щільність розподілу випадкової величини T є $f(t) = \nu[1 - B(t)]$, ν — середня інтенсивність обслуговування.

Нехай $b_k = \int\limits_0^\infty a_k(t) f(t)\, dt$ ймовірність надходження за час, що пройшов з початку обслуговування k первинних вимог.

Якщо в момент, коли остання обслужена вимога залишила систему, в ній було n джерел, то з ймовірністю $\frac{n\mu}{\lambda + n\mu}$ заявка, яка обслуговується, була повторною, а з ймовірністю $\frac{\lambda}{\lambda + n\mu} c_k$ прийшла в складі групи із k первинних викликів. Для того, щоб в результаті виявилось m джерел, необхідно надходження за пройдену частину часу обслуговування $m - n + 1$ первинних викликів в першому випадку і $m - n + 1 - k$ в другому.

Отже,

$$p(1, m) = \rho \left\{ \sum_{n=0}^{m+1} \pi_n \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} b_{m-n+1} + \sum_{n=0}^{m} \pi_n \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \sum_{k=1}^{m-n+1} c_k b_{m-n+1-k} \right\}. \quad (3)$$

Тут ρ — ймовірність зайнятості системи.

Для твірної функції $P_1(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m p(1, m)$ із (3) одержимо

$$P_1(z) = \rho b(z) \left[\mu \frac{d\pi(z)}{dz} + \lambda c(z) \pi(z) \right], \quad (4)$$

де $b(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \int\limits_0^\infty a(z, t) f(t)\, dt$.

Використовуючи формули для $a(z, t)$ і $f(t)$, після інтегрування частинами обчислимо $b(z)$:

$$b(z) = \frac{\nu[\alpha(z) - 1]}{\lambda[zc(z) - 1]}.$$

Враховуючи (2), перепишемо (4) в остаточному вигляді:

$$P_1(z) = (1 - \rho) \frac{\alpha(z) - 1}{z - \alpha(z)} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int\limits_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)}\, dx \right\}.$$

Оскільки ймовірність $p(n)$ мати n вимог в системі дається формулою

$$p(n) = p(0, n) + p(1, n - 1), \quad n \geqslant 1, \quad p(0) = p(0, 0)$$

для твірної функції $N(z)$ числа вимог в системі маємо

$$N(z) = p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n p(n) = p(0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n [p(0, n) + p(1, n - 1)] =$$

$$= P_0(z) + zP_1(z) = (1 - \rho) \frac{z - 1}{z - \alpha(z)} \alpha(z) \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int\limits_1^z \frac{\alpha(x) c(x) - 1}{x - \alpha(x)}\, dx \right\}.$$

Зокрема, при $\mu \to \infty$ можна розглядати систему з повторними викликами як систему із сподіванням (із випадковим вибором на обслуговування) і (5) перейде в формулу:

$$N(z) = (1-\rho)\frac{z-1}{z-\alpha(z)}\alpha(z).$$

Це відомий результат Гейвера для групового надходження вимог в систему із сподіванням [2, § 7.5].

Нехай тепер вхідний потік — пуассонівський інтенсивності λ, час обслуговування розподілений по експоненційному закону з параметром ν.

Припустимо, що в довільний момент часу є n джерел і i заявок на обслуговуванні. Позначимо тоді $u_{i,n}(t)$ ймовірність того, що дане із цих n джерел через час t іще не надійде на обслуговування. Тут $i = 0, 1$; $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ймовірність того, що час сподівання більше t дорівнює

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1, n-1)\, u_{1,n}(t).$$

На основі марківської властивості процесу маємо

$$\frac{du_{0,n}(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)\, u_{0,n} + (n-1)\,\mu u_{1,n-1} + \lambda u_{1,n};$$

$$\frac{du_{1,n}(t)}{dt} = -(\lambda + \nu)\, u_{1,n} + \lambda u_{1,n+1} + \nu u_{0,n}. \tag{6}$$

В принципі ці рівняння забезпечують знаходження розподілу часу сподівання і його моментів. Але одержані при цьому формули громіздкі.

Тим більше вдається легко обчислити середнє значення часу сподівання

$$u = \int_0^{\infty} u(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} p(1, n-1)\, u_{1,n}.$$

Інтегруємо основні рівняння (6)

$$-1 = -(\lambda + n\mu)\, u_{0,n} + (n-1)\,\mu u_{1,n-1} + \lambda u_{1,n},$$

$$-1 = -(\lambda + \nu)\, u_{1,n} + \lambda u_{1,n+1} + \nu u_{0,n}. \tag{7}$$

Тут $u_{i,n} = \int_0^{\infty} u_{i,n}(t)\, dt$.

В розглядуваному випадку

$$P_1(z) = \rho\left(\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right)^{\frac{\lambda}{\mu}+1}.$$

Звідси

$$\lambda p(1, n-1) = \frac{\nu\mu n}{\lambda + \mu n}\, p(1, n). \tag{8}$$

Виключимо із (7) $u_{0,n}$ і помножимо обидві частини одержаної рівності на $p(1, n-1)$. Якщо при цьому врахувати (8), то матимемо

$$-(\lambda + \nu + n\mu)\, p(1, n-1) = \lambda[\lambda + (n-1)\,\mu]\, p(1, n-2)\, u_{1,n-1} -$$
$$-[\lambda^2 + (\lambda + \nu)\,\mu n]\, p(1, n-1)\, u_{1,n} + \mu\nu n p(1, n)\, u_{1,n+1}.$$

Підсумовуючи щодо n, одержимо формулу

$$(\lambda + \nu + \mu) \sum_{n=0}^{\infty} p(1, n) + \mu \sum_{n=0}^{\infty} np(1, n) = \nu\mu u.$$

Але

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(1, n) = \rho, \quad \sum_{n=0}^{\infty} np(1, n) = \frac{\rho^2}{1-\rho}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Тому

$$u = \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{\rho}{1-\rho}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания, «Наука», М., 1966, 431 с.
2. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, «Сов. радио», М., 1971, 519 с.
3. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, М., 1963, 235 с.

Інститут радіотехники і електроніки
АН СРСР

Надійшла до редакції
12.II 1975 р.