УДК 517.537

Н. И. Нагнибида

Об одной общей схеме построения полных систем аналитических функций

Пусть X_1 и X_2 — линейные топологические пространства, а A — линейное непрерывное отображение X_1 в X_2, переводящее некоторую систему элементов $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X_1$ в систему, полную в X_2 (т. е. такую, что ее замкнутая линейная оболочка совпадает с X_2). Покажем, что при сделанных предположениях оператор A переводит любую полную в X_1 систему $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ также в полную (в X_2) систему $\{Ay_n\}_{n=0}^{\infty}$. Действительно, обозначим через L_{Ax}, L_y и L_{Ay} замкнутые линейные оболочки (в соответствующих пространствах) систем $\{Ax_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{Ay_n\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Тогда, очевидно, для любого $n\,(n\geqslant 0)$ $x_n\in L_y$ и поэтому $Ax_n\in L_{Ay}$. Следовательно, $X_2=L_{Ax}\subseteq L_{Ay}\subseteq X_2$, т. е. $L_{Ay}=X_2$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если оператор A отображает линейное топологическое пространство X_1 в такое же пространство X_2 линейно и непрерывно и переводит при этом некоторую систему элементов из X_1 в полную (в X_2), то он обладает этим свойством и по отношению к любой другой системе, полной в X_1.*

Отметим далее, что эта идея построения полных систем аналитических функций встречалась ранее (но в неявной форме!) уже неоднократно* (см., например, [1—6] и др.). Поэтому для дальнейшего напомним описание линейных непрерывных отображений некоторых аналитических пространств [7].

Пусть O_1 и O_2 — произвольные непустые открытые правильные множества римановой сферы Ω, каждое из которых является объединением не более чем счетного числа связных областей, а $P(O_1)$ и $P(O_2)$ — соответствующие пространства всех локально аналитических на O_1 и O_2 функций с общепринятой топологией (при этом $x(\infty)=0$, если только $x(z)\in P(O_i)$ и $\infty\in O_i$). Тогда, как известно [7], каждому линейному непрерывному отображению A пространства $P(O_1)$ в $P(O_2)$ сопоставляется определенная на некотором множестве O локально аналитическая по обеим переменным функция $a(\lambda_1, z_2)$, обращающаяся в нуль во всех точках (λ_1, z_2), в которых одна координата равна бесконечности, и обладающая следующим свойством: для каждого замкнутого подмножества R_2 из O_2 (содержащегося лишь в конечном числе компонент O_2) существует такое открытое, содержащее Ω — — O_1, множество H_1, каждая компонента которого имеет с $\Omega - O_1$ непустое пересечение, что $O\supset H_1\times R_2$. При этом для произвольной функции $x(t_1)\in P(O_1)$

$$(Ax)(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} x(t_1)\,a(t_1, z_2)\,dt_1,$$

где C — система спрямляемых кривых, охватывающих $\Omega - O_1$, выбранная соответствующим образом для каждого множества R_2.

Поэтому при сделанных предположениях (учитывая теорему 1) верна следующая теорема.

Теорема 2. *Если системы $\{x_{n,s}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ $(s=1, 2)$ полны в $P(O_1)$, то системы*

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} x_{n,s}(t)\,a(t, z)\,dt\right\}_{n=0}^{\infty}\quad (s=1, 2)$$

одновременно полны в $P(O_2)$ или не полны.

Перейдем теперь к рассмотрению более специального случая. Пусть $0<R<\infty$, D — некоторая ограниченная односвязная область, а функ-

---

* Рассматриваемой здесь схемой можно воспользоваться и при получении всевозможных обобщений принципа двойственности А. И. Маркушевича [8], как это сделано, скажем, в [9 и 10].

ция $F(\lambda, z)$ аналитична по каждому переменному (при фиксированном другом) в множестве $\{\lambda : |\lambda| \leqslant R\} \times \{z : z \in D\}$, причем для всякого компакта K, $K \subset D$, существует такое ε, $\varepsilon > 0$, что $F(\lambda, z)$ аналитична и в $\{\lambda : |\lambda| < R + \varepsilon\} \times \{z : z \in K\}$. Если, далее, через $A(D)$ обозначить топологическое пространство всех однозначных и аналитических функций в D, а через $A^0(|\lambda| > R)$ — соответственно пространство функций, однозначных и аналитических при $|\lambda| > R$ и равных нулю на бесконечности, то, очевидно, оператор

$$(Af)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\lambda) F(\lambda, z)\, d\lambda$$

(здесь замкнутый спрямляемый и охватывающий круг $|\lambda| \leqslant R$ контур C выбирается в зависимости от компакта K, $K \subset D$, и лежит в общей области аналитичности по λ функций $f(\lambda)$ и $F(\lambda, z)$) отображает пространство $A^0(|\lambda| > R)$ в $A(D)$ линейно и непрерывно. Учитывая еще полноту системы $\{\lambda^{-n-1}\}_{n=0}^{\infty}$ в $A^0(|\lambda| > R)$, легко убеждаемся в том, что в этом случае верна следующая теорема.

Теорема 3. *Если система $\{\psi_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $A^0(|\lambda| > R)$, то системы*

$$\left\{ \frac{\partial^n F(\lambda, z)}{\partial \lambda^n} \bigg|_{\lambda=0} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad и \quad \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \psi_n(\lambda) F(\lambda, z)\, d\lambda \right\}_{n=0}^{\infty}$$

одновременно полны в пространстве $A(D)$ или не полны.

Не останавливаясь на рассмотрении частных случаев (так как формулировка соответствующих утверждений особого труда не представляет), мы в заключение отметим лишь, что из этой теоремы при надлежащем выборе ядра $F(\lambda, z)$, а также системы $\{\psi_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ легко следуют многие, ранее доказанные (иногда даже иным путем) утверждения* о полноте в аналитических пространствах систем $\{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f(z + \alpha_n)\}_{n=0}^{\infty}$ (см. [2 и 8]), $\{f(\alpha_n z)\}_{n=0}^{\infty}$ (см., например, соответствующие теоремы и библиографию в [4]), $\{z^n f^{(n)}(\alpha_n z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{ \frac{\partial^n F(\lambda, z)}{\partial \lambda^n} \bigg|_{\lambda=\alpha_n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ и т. п. По приведенной выше схеме получаются также и некоторые результаты работы [6] (см. также [3]) и др.

Кроме того, аналогичные рассуждения могут быть проведены также для пространства функций, аналитических в замкнутых областях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альпер С. Я. О полноте систем аналитических функций.— ДАН СССР, 1949, **66**, № 6, с. 1029—1032.
2. Казьмин Ю. А. О полноте систем функций вида $\{f(z + \alpha_n)\}$ и $\{f^{(n)}(z)\}$.— УМН, 1957, **12**, вып. 2(74), с. 151—154.
3. Казьмин Ю. А. Об одном критерии полноты.— Сиб. мат. журн., 1964, **5**, № 3, с. 549—556.
4. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М., «Наука», 1971, 518 с.
5. Ибрагимов С. И. О полноте систем аналитических в кольце функций.— ДАН СССР, 1973, **210**, № 4, с. 767—770.

* Для их получения нужно, очевидно, в качестве $F(\lambda, z)$ брать или $f(\lambda z)$ или $f(\lambda + z)$, где $f(\zeta)$ — аналитическая в некоторой области функция.

6. Лохин И. Ф. О полноте систем аналитических функций.— Уч. зап. Горьк. ун-та, 1955, вып. 28
7. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie.— Journ. für reine und angewandte Mathematik, 1953, **191**.
8. Маркушевич А. И. О базисе в пространстве аналитических функций.— Матем. сб., 1945, **17** (59), № 2, с. 211—252.
9. Хапланов М. Г. Линейные функционалы в пространстве однозначных аналитических функций.— В кн.: Труды семинара по функциональному анализу Воронежского гос. ун-та, 1960, вып. 3—4.
10. Горгула В. И. К вопросу о принципе двойственности А. И. Маркушевича.— ДАН СССР, 1962, **143**, № 2, с. 269—271.

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию 31.I 1975 г.