УДК 519.217

Р. В. Бойко

Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных процессов с переменным режимом (критический случай)

В этой работе продолжается изучение ветвящихся процессов с переменным режимом, определение которых дано в работе [1] и названных там «управляемые ветвящиеся процессы». Напомним, что мы называем процесс $\xi(t)$, описывающий эволюцию количества частиц в популяции, ветвящимся процессом с переменным режимом, когда частицы размножаются и гибнут по следующей схеме. Если в момент t в популяции существует m частиц, то каждая частица за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ превращается в k частиц (k — целое положительное число и $k \neq 1$) независимо от остальных частиц с вероятностью $\pi_k(m)\,\Delta t + o(\Delta t)$ и остается неизменной с вероятностью

$$1+\pi_1(m)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad \left(\pi_k(m) \geqslant 0,\ k \neq 1,\ \pi_1(m) \leqslant 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(m) = 0\right),$$

причем $\pi_k(m) = \mu_k$ при $m > N$, где N — некоторое фиксированное целое положительное число.

Будем обозначать переходные вероятности ветвящегося процесса с переменным режимом $\xi(t)$ через $P_{ij}(t)$:

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}.$$

Введем обозначения для производящих функций интенсивностей размножения частиц:

$$\varphi_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \pi_k(m),\ m = 1, 2, \ldots, N; \qquad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mu_k.$$

Переходные вероятности обычного ветвящегося процесса $\nu(t)$ с интенсивностями размножения, производящая функция которых равна $\psi(z)$, будем обозначать через $P_{ij}(0, t)$: $P_{ij}(0, t) = P\{\nu(t) = j \mid \nu(0) = i\}$.

В данной работе нас будет интересовать случай, когда интенсивности размножения частиц процесса $\xi(t)$ при условии, что число частиц в популяции больше N, такие, что их производящая функция $\psi(z)$ удовлетворяет условию: $\dfrac{\partial \psi(1)}{\partial z} = 0$. По аналогии с обычными ветвящимися процессами этот случай будем называть критическим. Для простоты изложения будем считать, что $\xi(0) = 1$.

Рассмотрим условный закон распределения

$$R_t(x) = P\left\{\frac{2}{\psi''(1)\,t}\,\xi(t) < x \mid \xi(t) > 0\right\}. \tag{1}$$

Докажем следующую предельную теорему.

Теорема. *Если* $\varphi''_m(1) < \infty$, $m = \overline{1, N}$; $\psi'(1) = 0$, $\psi''(1) < \infty$, *то при* $t \to \infty$ *условное распределение*

$$R_t(x) = P\left\{\frac{2}{\psi''(1)\,t}\,\xi(t) < x \mid \xi(t) > 0\right\}$$

ветвящегося процесса с переменным режимом сходится к предельному показательному распределению $R(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$.

Для доказательства этого утверждения используем полученную в [1] вторую систему уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ процесса $\xi(t)$:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{j+1} k\pi_{j+1-k}(k)\,P_{ik}(t). \tag{2}$$

Тогда для производящей функции переходных вероятностей $F(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P_{1k}(t)$ можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial F(t, z)}{\partial t} + P'_{10}(t) = \psi(z)\,\frac{\partial F(t, z)}{\partial z} + \sum_{k=1}^{N} kz^{k-1} P_{1k}(t)\,(\varphi_m(z) - \psi(z)) \tag{3}$$

с граничным условием

$$F(t, 0) = 0. \tag{4}$$

Преобразование Лапласа $\Phi(t, s)$ условного распределения (1) связано следующим образом с функцией $F(t, z)$:

$$\Phi(t, s) = \frac{F\left(t, e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)}{1 - P_{10}(t)}. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением уравнения в частных производных (3) с граничным условием (4) является функция

$$F(t, z) = P_{10}\left(t + \int_0^z \frac{du}{\psi(u)}\right) + \int_0^z \frac{1}{\psi(x)} \sum_{k=1}^{N} kx^{k-1}(\psi(x) - \varphi_k(x)) \times$$

$$\times P_{1k}\left(t + \int_x^z \frac{du}{\psi(u)}\right) dx - P_{10}(t).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при каждом $s > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, s) = \lim_{t\to\infty} \frac{F\left(t, e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)}{1 - P_{10}(t)} = \frac{1}{1+s}, \tag{6}$$

так как в силу теоремы 2 [2, с. 497] из (6) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{2}{\psi''(1)\,t}\,\xi(t) < x \mid \xi(t) > 0\right\} = 1 - e^{-x}.$$

Докажем сначала вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если $g(t)$ — монотонная функция при $t \geqslant 0$ и при $t \to \infty$*

$$g(t) = 1 - \frac{c}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}, \tag{7}$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$, c — некоторая константа, то для обратной функции $h(z) = g^{-1}(z)$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$h(z) = \frac{c}{1-z} + o\left(\frac{1}{1-z}\right) \text{ при } z \to 1. \tag{8}$$

Действительно, функция $t = g^{-1}(z) = h(z)$ при $z \to 1$ стремится к бесконечности, значит из (7) следует, что при $z \to 1$

$$z = g(t) = 1 - \frac{c}{h(g(t))} + \frac{\varepsilon(h(g(t)))}{h(g(t))} = 1 - \frac{1}{h(z)} + \frac{\varepsilon_1(z)}{h(z)}, \tag{9}$$

где $\varepsilon_1(z) = \varepsilon(h(z)) \to 0$ при $z \to 1$.

Из соотношения (9) получаем, что

$$h(z) = \frac{c}{1-z} + \frac{\varepsilon_1(z)}{z-1} = \frac{c}{1-z} + o\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ — положительная, m раз дифференцируемая, монотонно убывающая, ограниченная функция при $x \geqslant 0$ и* $\frac{\partial^k f(0)}{\partial x^k}$ монотонны t, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда, если при $t \to \infty$*

$$\int_0^t x f(x)\, dx = a_1 t + o(t), \tag{10}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} t^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где a_k — некоторые константы.

Доказательство. Покажем сначала, что из условий леммы 2 следует, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t x^{k+1} \frac{d^k}{dx^k} f(x)\, dx = b_k t + o(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Действительно, при $1 \leqslant k \leqslant m$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} \frac{d^k}{dt^k} f(t)\, dt = (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^k}{dt^k} f(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} \left(s^k \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{d^r f(0)}{dt^r} s^{k-r-1} \right) =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r \frac{d^r}{ds^r} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \frac{d^{k-r+1}}{ds^{k-r+1}} s^k =$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} l_k(r) s^{r-1} \int_0^\infty e^{-st} t^r f(t)\, dt, \tag{12}$$

где $l_k(r)$ — некоторые константы. Далее, из условия (10) имеем, что

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} xf(x)\,dx = a_1\frac{t}{2} + o(t) \text{ при } t\to\infty.$$

Используя теорему о среднем, получаем, что

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} xf(x)\,dx = \frac{t}{2}\xi f(\xi), \text{ где } \frac{t}{2}\leqslant \xi \leqslant t.$$

Тогда в силу монотонности функции $f(x)$ будем иметь:

$$\frac{t^2}{4}f(t) \leqslant \int_{\frac{t}{2}}^{t} xf(x)\,dx = a_1 t + o(t).$$

Следовательно, при $t\to\infty$ $tf(t) \leqslant 4a_1 + o(1)$. Значит функция $tf(t)$ ограничена.

Пользуясь абелевой теоремой 1 [3, с. 456], из условия (10) заключаем, что при $s\to 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} tf(t)\,dt = \frac{a_1}{s} + o\left(\frac{1}{s}\right). \tag{13}$$

Из ограниченности функции $xf(x)$ и соотношения (13) согласно тауберовой теоремы Винера [4, с. 306, теорема 252] следует, что при $t\to\infty$, $n>0$

$$\int_0^t (t-x)^{n-1} xf(x)\,dx = \frac{t^n}{n}a_1 + o(t^n) \tag{14}$$

или

$$\int_0^t x^n f(x)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}a_1 + \sum_{r=1}^{n-1} C_{n-1}^r (-1)^{r-1} t^r \int_0^t x^{n-r} f(x)\,dx + o(t^n). \tag{15}$$

Используя (10), (15), методом математической индукции легко показать, что

$$\int_0^t x^n f(x)\,dx = a_n t^n + o(t^n), \tag{16}$$

где a_n — некоторая константа.

Действительно, при $n=1$ формула верна по предположению леммы. Предположим, что она верна при $1\leqslant k\leqslant n-1$:

$$\int_0^t x^k f(x)\,dx = a_k t^k + o(t^k),$$

тогда из (15) следует, что

$$\int_0^t x^n f(x)\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n a_1 + \sum_{r=1}^{n-1} C_{n-1}^r (-1)^{r-1} t^r (a_{n-r} t^{n-r} + o(t^{n-r})) +$$

$$+ o(t^n) = a_n t^n + o(t^n) \text{ при } t\to\infty.$$

В силу абелевой теоремы 1 (см. [3, с. 456]) из (16) следует, что при $s \to 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)\, dt = \frac{a_n \Gamma(n+1)}{s^n} + o\left(\frac{1}{s^n}\right). \tag{17}$$

Тогда, учитывая (17), из соотношения (12) получаем, что при $s \to 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} \frac{d^k}{dt^k} f(t)\, dt = b_k \frac{1}{s} + o\left(\frac{1}{s}\right), \tag{18}$$

где b_k — некоторая константа. Из соотношения (18) и тауберовой теоремы 4 (см. [3, с. 512]) следует формула (11).

Заметим, что при $k \leqslant m$

$$\int_0^t x^{k+1} \frac{d^k}{dx^k} f(x)\, dx = t^{k+1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) - (k+1) \int_0^t x^k \frac{d^{k-1}}{\partial x^{k-1}} f(x)\, dx, \tag{19}$$

тогда в силу (11) при $t \to \infty$

$$t^{k+1} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) = b_k t - (k+1) b_{k-1} t + o(t)$$

или

$$t^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) = b_k - (k+1) b_{k-1} + o(1) \text{ при } t \to \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. В работе [5] показано, что

$$P_{10}(t) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)} D_N \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \text{ при } t \to \infty, \tag{20}$$

значит

$$P_{10}\left(t + \int_0^z \frac{du}{\psi(u)}\right) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)} D_N \frac{1}{t + \int_0^z \frac{du}{\psi(u)}} + o\left(\frac{1}{t + \int_0^z \frac{du}{\psi(u)}}\right). \tag{21}$$

Известно [6, с 428], что при $t \to \infty$

$$P_{10}(0, t) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)} \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

и функция $h(z) = \int_0^z \frac{du}{\psi(u)}$, обратная к функции $z = P_{10}(0, t)$. Следовательно, в силу леммы 1 при $z \to 1$

$$\int_0^z \frac{du}{\psi(u)} = \frac{2}{\psi''(1)} \frac{1}{1-z} + o\left(\frac{1}{1-z}\right). \tag{22}$$

Тогда, учитывая (21) и (22), получаем, что при $t \to \infty$

$$P_{10}\left(t + \int\limits_0^{e^{\frac{2s}{\psi''(1)t}}} \frac{du}{\psi(u)}\right) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)} D_N \times$$

$$\times \frac{1}{t + \dfrac{2}{\psi''(1)\left(1 - e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)} + o\left(\dfrac{1}{1 - e^{\frac{2s}{\psi''(1)t}}}\right)} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{t + \int\limits_0^{e^{\frac{2s}{\psi''(1)t}}} \dfrac{du}{\psi(u)}}\right) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)} D_N \frac{1}{t + \dfrac{t}{s\left(1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)}} + o\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{\psi''(1)} D_N \frac{s}{t(s+1)} + o\left(\frac{1}{t}\right),$$

поэтому в силу (20) и предыдущего соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P_{10}\left(t + \int\limits_0^{e^{\frac{2s}{\psi''(1)t}}} \dfrac{du}{\psi(u)}\right) - P_{10}(t)}{1 - P_{10}(t)} = \frac{1}{1+s}. \tag{23}$$

Далее, из системы уравнений (2) легко получить, что

$$P_{1k}(t) = \alpha_1 P'_{10}(t) + \alpha_2 P''_{10}(t) + \ldots + \alpha_k P_{10}^{(k)}(t), \tag{24}$$

где α_j — некоторые константы. В силу утверждения леммы 2

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} P_{10}(t) = c_k \frac{1}{t^k} + o\left(\frac{1}{t^k}\right) \text{ при } t \to \infty,$$

поэтому из (24) получаем, что при $t \to \infty$

$$P_{1k}(t) = b_k \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right), \tag{25}$$

где b_k — некоторая константа.

Рассмотрим интеграл, входящий в формулу (5):

$$I(z) = \int\limits_0^z \sum_{k=0}^N k x^{k-1} P_{1k}\left(t + \int\limits_x^z \frac{du}{\psi(u)}\right) dx -$$

$$- \int\limits_0^z \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)} k x^{k-1} P_{1k}\left(t + \int\limits_x^z \frac{du}{\psi(u)}\right) dx = I_1(z) + I_2(z).$$

Легко видеть, принимая во внимание (25), что при $t \to \infty$

$$I_1\left(e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right) = O\left(\frac{1}{t^2}\right). \tag{26}$$

Далее, при больших t в силу (25)

$$I_2(z)=\sum_{k=1}^{N}\int_0^z \frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}kx^{k-1}P_{1k}\left(t+\int_x^z\frac{du}{\psi(u)}\right)dx\leqslant\frac{c'}{t^2}\sum_{k=1}^{N}k\int_0^z\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx, \tag{27}$$

где c' — некоторая константа.

Представим интеграл $I_2^{(k)}(z)=\int\limits_0^z\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx$ следующим образом:

$$I_2^{(k)}\left(e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}}\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx.$$

Нетрудно видеть, учитывая ограниченность функции $\varphi_k(x)$ при $x<1$ и формулу (22), что при $t\to\infty$

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx\leqslant L\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{du}{\psi(u)}=L\left(\frac{2}{\psi''(1)}\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}+o(\sqrt{t})\right)=O(\sqrt{t}). \tag{28}$$

Пользуясь формулой Тейлора, получаем, что при больших t

$$\int_{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{e^{-\frac{2s}{\psi''(1)}}}\frac{\varphi_k(x)}{\psi(x)}dx=\int_{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}}\frac{(x-1)\varphi_k'(1)+\frac{(x-1)^2}{2}\varphi_k''(1+\theta_x(x-1))}{\frac{(x-1)^2}{2}\psi''(1+\overline{\theta}_x(x-1))}dx=O(\ln t). \tag{29}$$

Поэтому из (28), (29) следует, что при $t\to\infty$

$$I_2\left(e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)=\sum_{k=1}^{N}I_2^{(k)}\left(e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)=O(\sqrt{t}). \tag{30}$$

Тогда в силу (20), (26) и (30) при $t\to\infty$

$$\frac{I\left(e^{-\frac{2s}{\psi''(1)t}}\right)}{1-P_{10}(t)}=O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \tag{31}$$

и поэтому из (23), (31) следует, что при каждом $s>0$

$$\lim_{t\to\infty}\Phi(t,s)=\frac{1}{1+s},$$

что и доказывает теорему, так как $\frac{1}{1+s}$ — преобразование Лапласа показательного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Р. В. Об одном управляемом ветвящемся процессе.— УМЖ, 1974, **24**, № 2, с 237—244.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. II. М., «Мир», 1967, 752 с.
3. Doetsch G. Handbuch der Laplace — Transformations. Band 1, 1950, 581 s.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951, 504 с.
5. Бойко Р. В. Об асимптотике вероятности вырождения ветвящегося процесса с переменным режимом (критический случай).— В кн.: Исследования по теории случайных процессов. К., Изд. Ин-та математики АН УССР, 1976, с. 21—30.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965, 654 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 25.IX 1975 г.