УДК 517.948

В. А. Гнатюк, В. В. Мойко

Численный метод решения одной обобщенной задачи выпуклого программирования в линейном нормированном пространстве

В данной работе обобщен известный алгоритм решения задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве на случай нормированного пространства. Для этого разработан метод решения вспомогательной задачи отыскания направления спуска за конечное число итераций. Кроме того, в работе предложены весьма простые формулы для вычисления величины шага вдоль направления спуска и получены удобные оценки, позволяющие прекратить счет при достижении заданной точности. Известны многие задачи оптимального управления [1—4], являющиеся экстремальными задачами в линейном нормированном пространстве.

Постановка задачи. Пусть в линейном нормированном пространстве E заданы выпуклые функционалы $f_i(x)$, $i \in J \overset{\Delta}{=} J_1 \cup J_2$, $J_1 = \{-m, -m+1, \ldots, -1, 0\}$, $J_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Согласно [5], обобщенной задачей выпуклого программирования будем называть отыскание

$$\inf\{\varphi(x) : x \in \Omega\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x) \overset{\Delta}{=} \max_{i \in J_1} f_i(x)$, $\Omega \overset{\Delta}{=} \{x \in E : f_i(x) \leqslant 0,\ i \in J_2\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что Ω — ограниченное множество, а функционалы $f_i(x)$, $i \in J$, обладают градиентами Фреше $h_i(x)$, удовлетворяющими условию Липшица на произвольном ограниченном множестве пространства E. Заметим, что из последнего предположения следует ограниченность функционалов $f_i(x)$ и их градиентов на ограниченных множествах пространства E.

Пусть $x \in \Omega$, $\delta > 0$, $z \in S_E \overset{\Delta}{=} \{z \in E : \| z \| \leqslant 1\}$. Обозначаем

$$J_1(x, \delta) = \{i \in J_1 : -\delta < f_i(x) - \varphi(x) \leqslant 0\},$$

$$J_2(x, \delta) = \{i \in J_2 : -\delta < f_i(x) \leqslant 0\},$$

$$u(x, \delta, z) = \max_{i \in J(x,\delta)} h_i(x) z, \quad J(x, \delta) = J_1(x, \delta) \cup J_2(x, \delta).$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Существует число* $L > 0$, *обладающее тем свойством, что для всех* $x \in \Omega$, $z \in S_E$, $\delta > 0$, *для которых* $u(x, \delta, z) < 0$, *вектор* $x + tz$ *принадлежит* Ω *для* $t \in [0, T(x, \delta, z)]$, *где*

$$T(x, \delta, z) = \min\left\{-\frac{u(x, \delta, z)}{L}, \ \frac{\delta}{2L}\right\}.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\varphi(x + tz) \leqslant \varphi(x) - \min\left\{\frac{Lt^2}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Алгоритм решения задачи. В качестве первого члена итерационной последовательности $\{x^k\}$ выбирается произвольная точка x^0, а в качестве исходного значения параметра δ — произвольное достаточно малое число δ_1.

Пусть уже получено приближение x^{k-1} и определено множество $J^{k-1} = J(x^{k-1}, \delta_k)$. Обозначим через $\lambda = (\lambda_i, i \in J^{k-1})$ вектор евклидова пространства размерности, равной количеству элементов множества J^{k-1}, а через

$$\Lambda_{k-1} = \left\{\lambda : \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0 \ (i \in J^{k-1})\right\}.$$

В качестве направления спуска из точки x^{k-1} возьмем произвольный вектор $z^k \in S_E$, удовлетворяющий условиям

$$0 \leqslant \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i h_i(x^{k-1}) z^k - \inf_{z \in S_E} \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i h_i(x^{k-1}) z \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i^k h_i(x^{k-1}) \right\| + \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i h_i(x^{k-1}) z^k \leqslant \delta_k, \tag{2}$$

где $\lambda^k \in \Lambda_{k-1}$. Обозначаем

$$u_k = u(x^{k-1}, \delta_k, z^k) = \max_{i \in J^{k-1}} h_i(x^{k-1}) z^k = \max_{\lambda \in \Lambda_{k-1}} \sum_{i \in J^{k-1}} \lambda_i h_i(x^{k-1}) z^k.$$

В случае $u_k < 0$ вычисляем x^k по формуле $x^k = x^{k-1} + t_k z^k$, где $t_k = T(x^{k-1}, \delta_k, z^k) = \min\left\{-\frac{u_k}{L}, \frac{\delta_k}{2L}\right\}$, а L — число, о котором говорилось в лемме. Согласно лемме вектор $x^k \in \Omega$. Если же $u_k \geqslant 0$, то полагаем $x^k = x^{k-1}$. При выборе нового значения параметра δ различаем два случая: а) $u_k < -\delta_k$; б) $u_k \geqslant -\delta_k$. В первом случае не меняем параметра δ, т. е. полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k$; во втором случае полагаем $\delta_{k+1} = \frac{\delta_k}{2}$.

Для последовательности $\{x^k\}$ справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$;

2) $\lim\limits_{j\to\infty} u_{k_j+1} = \lim\limits_{j\to\infty} \left\| \sum\limits_{i\in J^{k_j}} \lambda_i^{k_j+1} h_i(x^{k_j}) \right\| = \lim\limits_{j\to\infty} \inf\limits_{z\in S_E} \max\limits_{\lambda\in\Lambda_{k_j}} \sum\limits_{i\in J^{k_j}} \lambda_i h_i(x^{k_j})\, z = 0$,

где $\{x^{k_j}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^k\}$, обладающая тем свойством, что на каждом шаге k_j+1 меняется значение параметра δ;

3) пусть $J_1^k = J_1(x^k, \delta_{k+1})$, а $J_2^k = J_2(x^k, \delta_{k+1})$. Если $\sum\limits_{i\in J_1^k} \lambda_i^{k+1} > 0$, то для всех $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\varphi(x^k) - \varphi(x) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i\in J_1^k} \lambda_i^{k+1}} \left[(2+D)\,\delta_{k+1} - D u_{k+1}\right],$$

где D — диаметр множества Ω;

4) пусть $\{x^{k_j}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^k\}$, определенная в утверждении 2). Тогда существует $\rho > 0$ такое, что $\sum\limits_{i\in J_1^{k_j}} \lambda_i^{k_j+1} \geqslant \rho$ для достаточно больших i.

Теорема. *Имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^k) = \inf\{\varphi(x) : x \in \Omega\}.$$

Доказательство. Заметим, что в силу ограниченности функционалов $f_i(x)$ на множестве Ω функционал $\varphi(x)$ ограничен на этом множестве. Поэтому

$$\varphi^* = \inf\{\varphi(x) : x \in \Omega\} > -\infty.$$

Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек множества Ω, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi^*$, а $\{x^{k_j}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x^k\}$, определенная в утверждении 2). В силу утверждений 3) и 4) для достаточно больших j будем иметь

$$\varphi(x^{k_j}) - \varphi(x_{k_j}) \leqslant \frac{1}{\rho} \left[(2+D)\,\delta_{k_j+1} - D u_{k_j+1}\right].$$

Так как $\delta_{k_j+1} \to 0$ и $u_{k_j+1} \to 0$ (см. утверждения 1), 2)), из последнего неравенства получим

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(x^k) = \varphi^*.$$

И так как $\{\varphi(x_{k_j})\}$ — подпоследовательность сходящейся последовательности $\{\varphi(x_k)\}$, то отсюда и из последнего неравенства вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^k) \leqslant \varphi^*.$$

С другой стороны, $\varphi(x^k) \geqslant \varphi^*$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x^k) \geqslant \varphi^*$, что вместе с предыдущим дает $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x^k) = \varphi^*$. Этим самым доказывается сходимость предложенного выше алгоритма решения задачи (1).

Следствие. *Если Ω — слабый компакт, то произвольная предельная в слабом смысле точка последовательности $\{x^k\}$ является решением задачи* (1).

Пусть задача (1) имеет решение x^*. Согласно утверждению 3) имеют место неравенства

$$0 \leqslant \varphi(x^k) - \varphi(x^*) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i \in J_1^k} \lambda_i^{k+1}} [(2 + D)\delta_{k+1} - Du_{k+1}]. \tag{3}$$

В частности, для подпоследовательности $\{x^{k_j}\}$, определенной в утверждении 2), имеем:

$$0 \leqslant \varphi(x^{k_j}) - \varphi(x^*) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i \in J_1^{k_j}} \lambda_i^{k_j+1}} [(2 + D)\delta_{k_j+1} - Du_{k_j+1}] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sum\limits_{i \in J_1^k} \lambda_i^{k_j+1}} [(2 + D)\delta_{k_j+1} + D\delta_{k_j+1}] = \frac{2(D+1)}{\sum\limits_{i \in J_1^{k_j+1}} \lambda_i^{k_j}} \delta_{k_j+1}. \tag{4}$$

Учитывая теперь утверждение 4), для достаточно больших j будем иметь:

$$0 \leqslant \varphi(x^{k_j}) - \varphi(x^*) \leqslant \frac{2(D+1)}{\rho}\delta_{k_j+1} = \frac{2(D+1)\delta_1}{\rho}\frac{1}{2^j}. \tag{5}$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi(x^{k_j})\}$ сходится к $\varphi^* = \varphi(x^*)$ со скоростью геометрической прогрессии.

Замечание 1. Оценки (3) — (5) можно использовать для прекращения вычислений при достижении заданной точности.

Замечание 2. В предложенном выше алгоритме решения задачи (1) предполагалось, что число L, фигурирующее в лемме, известно. Однако это не всегда так. В том случае, когда число L неизвестно, длину шага при $u_k < 0$ вычислим по формуле

$$t_k = \min\left\{-\frac{u_k}{L_k}, \ \frac{\delta_k}{L_k}\right\},$$

где L_0 выбирается произвольно,

$$L_k = 2^{n_k - 1} L_{k-1}, \tag{6}$$

а n_k — наименьшее натуральное число, для которого

$$x^k = x^{k-1} + t_k z^k \in \Omega$$

и (7)

$$\varphi(x^{k-1}) - \varphi(x^k) \geqslant \min\left\{\frac{Lt_k^2}{2}, \ \frac{\delta_k}{2}\right\}.$$

Согласно лемме число n_k существует. Более того, существует номер k такой, что $\forall\, k > K \quad L = L_{k-1} = L_k = \ldots$

Заметим, что утверждения 1) — 4) и теорема будут иметь место и в случае, когда t_k выбирается по формуле (7).

Замечание 3. Нетрудно увидеть, что для решения вспомогательной задачи отыскания направления спуска, удовлетворяющего условию (2), легко обобщаются конечношаговые методы решения этой задачи в рефлексивном банаховом пространстве, предложенные в работах [6 и 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений.— ЖВМ и МФ, 6, № 5, 1966, с. 787—824.
2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд-во ЛГУ, 1968. с. 180.
3. Левитин Е. С. Об одном общем методе минимизации для негладких экстремальных задач.— ЖВМ и МФ, 9, № 4, 1969, с. 783—807.
4. Родинцев Н. Е. Метод возможных направлений в задачах оптимизации стохастических систем.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, № 1, 1972, с. 37—42.
5. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М., «Наука», 1972. 365. с.
6. Гнатюк В. О. Чисельні методи розв'язування однієї екстремальної задачі в банаховому просторі.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 4, с. 308—312.
7. Гнатюк В. А. Численный метод решения задачи выпуклого программирования в банаховом пространстве.— В кн.: Труды III Республиканской научной конференции молодых исследователей по кибернетике. Т. II, К., 1968, с. 241—245.

Каменец-Подольский педагогический институт,
Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 27.XII. 1974 г.,
после переработки —16.II. 1976 г