УДК 517.949.22

Н. Н. Чаус

О поведении решений дифференциально-разностных уравнений

Рассмотрим последовательности $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$. На таких u задается с помощью $l + r + 1$ последовательностей разностное выражение Au:

$$(Au)_i = (C_0)_i u_{i-l} + \ldots + (C_l)_i u_i + \ldots + (C_{l+r})_i u_{i+r} \tag{1}$$

Нас интересует поведение решений $u(t) = \{u_i(t)\}$ уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t). \tag{2}$$

Цель данной заметки состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $l \geqslant 1$, $r \geqslant -l$ и коэффициенты $(C_k)_i$ выражения* (1) *удовлетворяют неравенствам*

$$|(C_0)_i| \geqslant \lambda i^{-a_0}, \quad |(C_k)_i| \leqslant \lambda i^{a_k - a_0} \quad (k = 1, \ldots, l + r;\ i = 0, 1, \ldots)$$

с некоторыми λ, a_0, $a_k \geqslant 0$.

а) *Если $u(t) = \{u_i(t)\}$ — решение уравнения* (2), *определенное при $0 \leqslant t \leqslant 1$, и выполняются ограничения*

$$|u_i(t)| \leqslant C i^{-(h+\delta)i} \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

где C, $\delta > 0$ и $h = \max\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{l+r}}{l+r}, \frac{1 + a_0}{l}\right\}$, то $u(t) \equiv 0$.

б) *Если $u(t) = \{u_i(t)\}$ — решение уравнения* (2), *определенное при $-\infty < t < \infty$, и выполняются ограничения*

$$|u_i(t)| \leqslant C i^{-(h+\delta)i} \exp\{\gamma |t|^q\} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

с некоторыми $C, \delta, \gamma > 0$, $q > 1$ и $h = \max\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{l+r}}{l+r}, \frac{q - 1 + a_0 q}{lq}\right\}$, то $u(t) \equiv 0$.

Такая же теорема, по соображениям симметрии, может быть сформулирована и на другой полуоси, т. е. когда r и l меняются ролями.

Эта теорема будет доказана с использованием факта, который может представлять самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть A и $a_0, a_1, \ldots, a_{l+r}$ те же, что в теореме* 1 *и пусть*

$$|(A^n u)_i| \leqslant C n^{pn} i^{-(q+\delta)i} \quad (n, i = 0, 1, \ldots),$$

где $C, \delta, p > 0$ и $q = \max\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{l+r}}{l+r}, \frac{a_0 + p}{l}\right\}$. Тогда $u_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

Отметим, что теорема 2 является аналогом результатов, имеющихся для случая, когда A — дифференциальное выражение, а $u = u(x)$ $(x > 0)$ [1 — 4].

Доказательство. Обозначим $A^n u = u^{(n)}$, так что

$$(C_0)_i u_{i-l}^{(n)} + \ldots + (C_l)_i u_i^{(n)} + \ldots + (C_{l+r})_i u_{i+r}^{(n)} = u_i^{(n+1)}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$|(C_0)_{i+l} u_i^{(n)}| \leqslant |(C_1)_{i+l} u_{i+1}^{(n)}| + \ldots + |(C_{l+r})_{i+l} u_{i+l+r}^{(n)}| + |u_{i+l}^{(n+1)}|.$$

Если разделить обе части этого неравенства на $|(C_0)_{i+l}|$, получим неравенство

$$|u_i^{(n)}| \leqslant (\alpha_1)_{i+1}|u_{i+1}^{(n)}| + \ldots + (\alpha_{l+r})_{i+l+r}|u_{i+l+r}^{(n)}| + (\alpha_0)_{i+l}|u_{i+l}^{(n+1)}|,$$

где, благодаря оценкам, имеющимся для $(C_k)_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ можно считать, что $(\alpha_k)_i = \mu i^{a_k}$ $(k = 0, 1, \ldots, l+r;\ i = 0, 1, \ldots;\ \mu > 0)$. Если ввести на последовательностях операцию сдвига: $(Tu)_i = u_{i+1}$ и обозначить $|u_i^{(n)}| = v_i^{(n)}$, то последнее неравенство можно записать в виде:

$$v^{(n)} \leqslant T(\alpha_1 v^{(n)}) + T^2(\alpha_2 v^{(n)}) + \ldots + T^{l+r}(\alpha_{l+r}v^{(n)}) + T^l(\alpha_0 v^{(n+1)}),$$

где в круглых скобках стоят последовательности, получающиеся при компонентном перемножении последовательностей-сомножителей, а координатные индексы в неравенстве все одинаковые из-за наличия операторов T^k и нами опущены. Запишем это неравенство еще короче:

$$v^{(n)} \leqslant Lv^{(n)} + Kv^{(n+1)}$$

с понятными обозначениями L и K. Подстановка этого неравенства в себя же дает следующее:

$$v^{(n)} \leqslant L^2 v^{(n)} + (LK + KL)\, v^{(n+1)} + K^2 v^{(n+2)}.$$

Проделанная операция законна, так как $Lu \geqslant Lv$ и $Ku \geqslant Kv$ при $u \geqslant v \geqslant$. Повторяя эту операцию, получаем следующее неравенство при любом $N = 1, 2, \ldots$:

$$|u| \equiv v^{(0)} \leqslant \sum_{k=0}^{N} \varphi[L^{N-k}, K^k]\, v^{(k)}, \tag{3}$$

где $\varphi[L^{N-k}, K^k]$ обозначает сумму C_N^k слагаемых, каждое из которых получается при перемножении $N-k$ экземпляров L и k экземпляров K, а отличаются они порядком сомножителей. При коммутирующих L и K $\varphi[L^{N-k}, K^k] = C_N^k L^{N-k} K^k$.

Теперь покажем, что в условиях теоремы правая часть неравенства (3) стремится к нулю при $N \to \infty$, откуда будет следовать $u \equiv 0$. Дальнейшие формулы, которые мы пишем, приспособлены для случая $L \not\equiv 0$. Если $L \equiv 0$, то неравенство (3) приобретает вид $|u| \leqslant K^N v^{(N)}$ и доказательство $u \equiv 0$ выглядит намного проще.

Начнем с того, что из-за неубывания последовательностей $\alpha_0, \ldots, \alpha_{l+r}$ при неотрицательной последовательности w $(\alpha_k Tw)_i \leqslant (T(\alpha_k w))_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$, откуда

$$K^m w \leqslant T^{lm}(\alpha_0^m w),$$

$$L^n w = L^{n-1}\{T(\alpha_1 w) + T^2(\alpha_2 w) + \ldots + T^{l+r}(\alpha_{l+r}w)\} \leqslant$$

$$\leqslant TL^{n-1}(\alpha_1 w) + T^2L^{n-1}(\alpha_2 w) + \ldots + T^{l+r}L^{n-1}(\alpha_{l+r}w) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l+r} T^i L^{n-1}(\alpha_i w) \leqslant \ldots \leqslant \sum_{i=1}^{l+r}\sum_{j=1}^{l+r}\ldots\sum_{\nu=1}^{l+r} T^{i+j+\ldots+\nu}(\alpha_i\alpha_j\ldots\alpha_\nu w)$$

здесь количество индексов $i, j, \ldots, \nu$ равно n).

В результате можем написать, что

$$L^n K^m w \leqslant \sum_{i,\ldots,\nu=1}^{l+r} T^{i+\ldots+\nu+lm}(\alpha_i \ldots \alpha_\nu \alpha_0^m w),$$

или в координатах ($s=0, 1, \ldots$):

$$(L^n K^m w)_s \leqslant \sum_{i,\ldots,\nu=1}^{l+r} (\alpha_i \ldots \alpha_\nu \alpha_0^m w)_{s+i+\ldots+\nu+lm}.$$

Последнее неравенство запишем, полагая $n=N-k$, $m=k$, $w=v^{(k)}$ и используя данные о поведении последовательностей α_n и $v^{(k)}$. Итак, пусть $(\alpha_n)_i = \mu i^{a_n}$, $(v^{(k)})_i = |(A^k u)_i| \leqslant Ck^{pk} i^{-(q+\delta)i}$. Тогда для случая $s=0$ получаем:

$$(L^{N-k} K^k v^{(k)})_0 \leqslant B_1 \sum_{i,\ldots,\nu=1}^{l+r} (i+\ldots+\nu+kl)^{a_i+\ldots+a_\nu+a_0k-(q+\delta)(i+\ldots+\nu+kl)} k^{pk}$$

(здесь количество индексов $i, \ldots, \nu$ равно $N-k$). Если частично воспользоваться очевидными неравенствами

$$N \leqslant i+j+\ldots+\nu+kl \leqslant (l+r+1)N,$$

$$k^{pk} \leqslant N^{pk}, \; a_i+a_j+\ldots+a_\nu+a_0k \leqslant aN \quad (a \text{ — const}),$$

последняя оценка может быть продолжена следующим образом:

$$(L^{N-k} K^k v^{(k)})_0 \leqslant B_2^N \sum_{i,\ldots,\nu=1}^{l+r} N^{a_i+\ldots+a_\nu+a_0k-(q+\delta)(i+\ldots+\nu+kl)+pk}.$$

Нетрудно видеть, что выражение $a_i+\ldots+a_\nu-(q+\delta)(i+\ldots+\nu)$ при фиксированных $i, \ldots, \nu$ $(1 \leqslant i, \ldots, \nu \leqslant l+r+1)$ можно представить в виде

$$a_i+\ldots+a_\nu-(q+\delta)(i+\ldots+\nu) =$$
$$= a_1\varepsilon_1+\ldots+a_{l+r}\varepsilon_{l+r}-(q+\delta)(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+(l+r)\varepsilon_{l+r}),$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l+r}$ — неотрицательные числа и $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{l+r}=N-k$. Теперь учтем, что по условию теоремы $a_n \leqslant nq$ и $p+a_0 \leqslant lq$. При этом

$$a_i+\ldots+a_\nu-(q+\delta)(i+\ldots+\nu) \leqslant -\delta(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+(l+r)\varepsilon_{l+r})$$

и

$$a_0k-(q+\delta)kl+pk \leqslant -\delta kl,$$

и, следовательно,

$$(L^{N-k} K^k v^{(k)})_0 \leqslant B_2^N \sum_{(\varepsilon)} N^{-\delta(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+(l+r)\varepsilon_{l+r}+kl)} \leqslant B_2^N \sum_{(\varepsilon)} N^{-\delta N},$$

где через (ε) обозначено множество наборов $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l+r})$ с условием $\Sigma\varepsilon_i = N-K$. Но это значит, что справедлива оценка

$$(L^{N-k} K^k v^{(k)})_0 \leqslant B_3^N N^{-\delta N} \quad (N=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Здесь и в предыдущих формулах B_1, B_2, $B_3 > 0$ — постоянные. Напомним, что на пути к (4) мы каждый раз выражения $\alpha_i T v^{(k)}$ заменяли на большие $T(\alpha_i v^{(k)})$. По этой причине путь получения оценки (4) остается пригодным и при рассмотрении выражения $\varphi[L^{N-k}, K^k]$. Поэтому $(\varphi[L^{N-k}, K^k] v^{(k)})_0 \leqslant B_3^N N^{-\delta N}$, откуда неравенство (3) дает $u_0=0$.

Рассмотрим теперь наряду с последовательностью u, удовлетворяющей условию теоремы, последовательность $T^m u$ $(m>0)$. Так как $(A^n T^m u)_s \leqslant (T^m A^n u)_s$ для $s \geqslant 0$, то $(A^n T^m u)_s \leqslant (A^n u)_{s+m} \leqslant Cn^{pn} s^{-(q+\delta)s}$ и, таким образом, $T^m u$ удовлетворяет условию теоремы. Отсюда $(T^m u)_0$, по уже доказанному, равно нулю, т. е. $u_m = 0$ $(m=1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.

а) Пусть $\{u_i(t)\}$ — решение уравнения (2), $0 \leqslant t \leqslant 1$. Построим последовательность w_i, взяв $\omega(t) \in C_0^\infty(0, 1)$:

$$w_i = (u_i(t), \omega(t)) = \int_0^1 u_i(t)\,\omega(t)\,dt \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Имеем

$$(Aw)_i = ((Au)_i, \omega(t)) = (u_i'(t), \omega(t)) = -(u_i(t), \omega'(t))$$

и вообще для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$(A^n w)_i = (-1)^n (u_i(t), \omega^{(n)}(t)).$$

Теперь будем считать, что $\omega(t)$ обладает свойством: $|\omega^{(n)}(t)| \leqslant Cn^{(1+\varepsilon)n}$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$; $n = 0, 1, \ldots$). Известно, что при любом $\varepsilon > 0$ такие нетривиальные $\omega(t)$ существуют [5]. Если к этому добавить оценки, которые по условию теоремы имеются для $|u_i(t)|$, получим:

$$|(A^n w)_i| \leqslant \max_{0<t<1} |u_i(t)|\,|\omega^{(n)}(t)| \leqslant Cn^{(1+\varepsilon)n} i^{-(h+\delta)i},$$

где, по условию теоремы, $h = \max\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{l+r}}{l+r}, \frac{1+a_0}{l}\right\}$, а $\varepsilon > 0$ можно всегда считать малым по сравнению с $\delta > 0$. Но легко видеть, что при наличии таких ограничений на $|(A^n w)_i|$ по теореме 2 $w_i = 0$ ($i=0, 1, \ldots$). Так как функций $\omega(t)$ с нужными нам свойствами достаточно много, то из равенства $w_i = 0$ делаем вывод, что $u_i = 0$ ($i = 0, 1, \ldots$).

Теперь наряду с решением $u(t)$ уравнения (2) рассмотрим последовательность $v(t) = T^{-1}u(t)$. Понятно, что $v(t)$ удовлетворяет уравнению $v'(t) = Bv(t)$, где $B = T^{-1}AT$, или $(Bv)_i = (\widetilde{C}_0)_i v_{i-l} + \ldots + (\widetilde{C}_l)_i v_i + \ldots \ldots + (\widetilde{C}_{l+r})_i v_{i+r}$, где $(\widetilde{C}_k)_i = (C_k)_{i-1}$.

Легко видеть, что выражение B и последовательность $v_i(t)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в теореме 1 для A и $u_i(t)$. А именно:

$$|(\widetilde{C}_0)_i| = |(C_0)_{i-1}| \geqslant \lambda(i-1)^{-a_0} \geqslant \widetilde{\lambda} i^{-a_0},$$

$$|(\widetilde{C}_k)_i| = |(C_k)_{i-1}| \leqslant \lambda(i-1)^{a_k - a_0} \leqslant \widetilde{\lambda}_i^{a_k - a_0} \quad (k = 1, \ldots, l + r),$$

$$|v_i(t)| = |u_{i-1}(t)| \leqslant C(i-1)^{-(h+\delta)(i-1)} \leqslant \widetilde{C} i^{-(h+\delta_1)i}$$

с некоторыми постоянными $\widetilde{C}, \widetilde{\lambda} > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, $i = 0, 1, \ldots$. Поэтому по уже доказанному $v_i(t) = 0$ ($i = 0, 1, \ldots$). Отсюда $v_0(t) = u_{-1}(t) = 0$. Таким же путем получаем, что $u_i(t) = 0$ ($i = -2, -3, \ldots$). Первая часть теоремы доказана.

б) Обозначим через $\Phi_{q,b}$ ($q > 1$, $b > 0$) пространство бесконечно дифференцируемых на всей оси функции $\varphi(t)$, для которых справедливы неравенства:

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leqslant C_\varphi C_0^k k^{\left(1-\frac{1}{q}\right)k} \exp\{-b|t|^q\} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

с некоторыми постоянными $C_\varphi, C_0 > 0$. Из теории пространств B_α^β известно [6], что такие нетривиальные $\varphi(t)$ существуют и что пространство $\Phi_{q,b}$ при $q > 1$ и произвольном $b > 0$ достаточно богато по запасу функций.

Взяв решение $\{u_i(t)\}$ ($-\infty < t < \infty$) уравнения (2) и $\varphi(t) \in \Phi_{q,b}$ с достаточно большим $b > 0$, образуем последовательность

$$w_i = (u_i(t), \varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)\,\varphi(t)\,dt \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Используя имеющиеся для $|u_i(t)|$ и $|\varphi^{(n)}(t)|$ оценки, получаем

$$|(A^n w)_i| = |(u_i(t), \varphi^{(n)}(t))| \leqslant C^n n^{\left(1-\frac{1}{q}\right)n} i^{-(h+\delta)i},$$

где $h = \max\left\{a_1, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{l+r}}{l+r}, \frac{q-1+a_0 q}{lq}\right\}$. Но при таком h по теореме 2 $w_i = 0$, откуда $u_i(t) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Равенства $u_{-1}(t) = u_{-2}(t) = \ldots$ $\ldots = 0$ устанавливаются так же, как в части а) доказательства. Теорема доказана.

Окончим заметку рассмотрением частного случая выражения A. Пусть коэффициенты $(C_k)_i$ выражения (1) ограничены и $(C_0)_i \equiv 1$. Тогда $a_0 = a_1 = \ldots$ $\ldots = a_{l+r} = 0$. Поэтому решение $\{u_i(t)\}$ уравнения $u'(t) = Au$ может быть только нулевым при $0 \leqslant t \leqslant 1$, если

$$|u_i(t)| \leqslant C i^{-\left(\frac{1}{l}+\delta\right)i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, \delta > 0, i = 0, 1, \ldots).$$

Если $-\infty < t < \infty$, решение будет нулевым при наличии ограничения $(i = 0, 1, \ldots)$:

$$|u_i(t)| \leqslant C i^{-\frac{q-1+\delta}{lq} i} \exp\{\gamma |t|^q\} \quad (q > 1;\ C, \delta, \gamma > 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельбройт С. Теоремы замкнутости и теоремы композиции. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 453 с.
2. Бабенко К. И. О некоторых классах пространств бесконечно дифференцируемых функций.— ДАН СССР, 1960, **132**, № 6, с. 1231—1234.
3. Джрбашян М. М. Теоремы единственности для преобразований Фурье и для бесконечно дифференцируемых функций.— Изв. АН АрмССР, 1957, **10**, № 6, с. 7—24.
4. Чаус Н. Н. О несуществовании быстро убывающих решений в полуполосе.— УМЖ, 1976, **28**, № 2, с. 213—221.
5. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций. М.—Л., ОНТИ, 1937. 107 с.
6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2, М., Физматгиз, 1958. 439 с.

Институт математики АН УССР

Поступила в редакцию 18.XI. 1975 г.