УДК 513.88:517.978

В. В. Шевчик

О спектре общего сингулярного оператора

Пусть E — пространство Банаха и M подалгебра алгебры $L(E)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих в E. Следуя работе [1], оператор $C = A_1 + A_2 S + T$ назовем общим сингулярным оператором, если $A_1, A_2 \in M$, T принадлежит идеалу D вполне непрерывных операторов, действующих в E, и оператор S удовлетворяет условиям:

а) $S^2 = I$;

б) $S \neq \pm I$;

в) $SA - AS \in D$ при $A \in M$.

В работе исследуется спектр общего сингулярного оператора C. При этом в качестве подалгебры M берется коммутативная банахова алгебра $M(U)$, представляющая собой множество функций от одного оператора в смысле функционального исчисления, разработанного в [2]. В рамках предположений, сделанных относительно подалгебры M, рассматривается спектр общего сингулярного оператора, как оператора, действующего в некотором семействе банаховых пространств E_α $(0, \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

1. Пусть обратимый оператор $U \in L(E)$ и оператор проектирования $P=\frac{1}{2}(I-S)$ удовлетворяют условиям:

1) спектральные радиусы операторов U и U^{-1} равны единице;
2) $UP=PUP$, $UP \neq PU$, $PU^{-1}=PU^{-1}P$.

В [2] вводится, как замыкание линейной оболочки всех операторов U^j $(j=0, \pm 1, \ldots)$, банахова алгебра $M(U)$. Каждому оператору $A \in M(U)$ ставится в соответствие некоторая непрерывная на единичной окружности функция $A(\zeta)$ — символ A. Понятие символа используется при исследовании условий обратимости операторов из $M(U)$. Предположим далее $M=M(U)$.

Теорема 1. *Если $SU-US \in D$, где U — порождающий оператор алгебры $M(U)$, то тогда $SA-AS \in D$ для любого оператора $A \in M(U)$.*

Рассмотрим в E оператор $C_1=A_1+A_2S$, который называется характеристической частью оператора C.

Теорема 2. *Спектр оператора C_1 состоит из точек кривых*

$$\lambda=A_1(\zeta)-A_2(\zeta), \quad \lambda=A_1(\zeta)+A_2(\zeta) \tag{1}$$

и из точек λ, не лежащих на этих кривых, для которых число

$$\varkappa(C_1-\lambda I)=\operatorname{ind}\left[\frac{A_1(\zeta)-A_2(\zeta)-\lambda}{A_1(\zeta)+A_2(\zeta)-\lambda}\right] \neq 0. \tag{2}$$

Утверждение теоремы 2 получим приводя оператор $C_1-\lambda I$ к виду $AP+BQ$, где $A=A_1-A_2-\lambda I$, $B=A_1+A_2-\lambda I$, $P=\frac{1}{2}(I-S)$, $Q=\frac{1}{2}(I+S)$, и применяя теорему об обратимости оператора $AP+BQ$, доказанную в [2].

Следствие. *Если для некоторого λ $A_1(\zeta)-A_2(\zeta) \neq 0$, $A_1(\zeta)+A_2(\zeta) \neq 0$ и $\varkappa(C_1-\lambda I) \neq 0$, то для такого λ оператор $C_1-\lambda I$ нетеров.*

Действительно, в этом случае, как следует из общих свойств алгебры $M(U)$, операторы $A_1-A_2-\lambda I$, $A_1+A_2-\lambda I$ обратимы в $M(U)$. Оператор

$$C_2(\lambda)=\frac{1}{2}[(A_1+A_2-\lambda I)^{-1}+(A_1-A_2-\lambda I)^{-1}]+$$

$$+\frac{1}{2}[(A_1+A_2-\lambda I)^{-1}-(A_1-A_2-\lambda I)^{-1}]S \tag{3}$$

является левым и правым регуляризатором для $C_1-\lambda I$. Следовательно (см. [3]), оператор $C_1-\lambda I$ нетеров.

2. Пусть банахово пространство E_1 непрерывно плотно вложено в банахово пространство E_0 (см. [4]). Рассмотрим множество K линейных операторов, ограниченных одновременно в E_0 и E_1:

$$K=L(E_1) \cap L(E_0).$$

K — банахова алгебра с нормой

$$\|A\|_K=\max\{\|A\|_{E_1}, \|A\|_{E_0}\}.$$

Пусть M_K — некоторая подалгебра алгебры K.

Определение. Оператор $C=A_1+A_2S+T$ будем называть общим сингулярным оператором в паре банаховых пространств E_1, E_0, если A_1, $A_2 \in M_K$, T принадлежит идеалу D_K в K операторов вполне непрерывных одновременно в E_1 и E_0 и оператор S удовлетворяет условиям а), б) и в) в пространствах E_1 и E_0.

Будем рассматривать в качестве подалгебры M_K алгебру $M_K(U)$. Согласно определениям, принятым нами, $M_K(U)$ является множеством функций от одного оператора U, принадлежащего K, одновременно в E_1 и E_0.

При этом предполагается, что оператор U обратимый в K и проектор $P = \frac{1}{2}(I - S)$ удовлетворяют указанным выше условиям 1) и 2) в E_1 и E_0.

Пусть некоторый оператор $A \in K$ является нетеровым одновременно в E_1 и E_0. Индекс $\varkappa_1(A)$ оператора A и E_1 может быть отличен от индекса $\varkappa_0(A)$ оператора A в E_0 (см., например, [5]).

Однако, как будет показано, в точках нетеровости оператора $C_1 - \lambda I$ одновременно в E_1 и E_0

$$\varkappa_0(C_1 - \lambda I) = \varkappa_1(C_1 - \lambda I).$$

Разложим пространства E_1 и E_0 в прямые суммы подпространств

$$E_1 = N_1 + F_1, \qquad E_0 = N_0 + F_0, \tag{4}$$

$$E_1 = R_1 + G_1, \qquad E_0 = R_0 + G_0, \tag{5}$$

где N_1, N_0 и R_1, R_0 соответственно ядра и области значений оператора A, нетерового в E_1 и E_0.

Лемма 1. *Если* $\varkappa_1(A) = \varkappa_0(A) = 0$, *то разложения* (4), (5) *могут быть осуществлены так, что* N_1 *совпадает с* N_0, G_1 *совпадает с* G_0, F_1 *плотно вложено в* F_0, *а* R_1 *плотно вложено в* R_0. *При этом* $\dim N_1 = \dim N_0 = \dim G_1 = \dim G_0$.

Лемма 2. Если $\varkappa_1(A) = \varkappa_0(A) = 0$, то оператор A представим в виде $A = B^{-1} + T$, *где* T — *конечномерен в* K, *а* B *обратим в* K.

Используя леммы 1, 2, а также метод построения левого (правого) регуляризатора, данный в [6], получим критерий равенства индексов $\varkappa_1(A)$ и $\varkappa_0(A)$ оператора A, нетерового в E_1 и E_0.

Теорема 3*. *Для того чтобы оператор* A, *нетеровый в* E_1 *и* E_0, *имел равные индексы* $\varkappa_0(A)$ *и* $\varkappa_1(A)$, *необходимо и достаточно существование левого (правого) регуляризатора* A_1, *принадлежащего* K.

Так как оператор (3) является левым (правым) регуляризатором для оператора $C_1 - \lambda I$ одновременно в E_1 и E_0, то используя теорему 3, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* C_1 — *характеристическая часть общего сингулярного оператора* C *в паре банаховых пространств* E_1 *и* E_0. *Спектры оператора* C_1 *в пространствах* E_1 *и* E_0 *совпадают и состоят из точек кривых* (1) *и из тех точек, для которых число* $\varkappa(C_1 - \lambda I)$, *определяемое по формуле* (2), *отлично от нуля. Если для некоторого* λ $A_1(\zeta) - A_2(\zeta) - \lambda \neq 0$ *и* $A_1(\zeta) + A_2(\zeta) - \lambda \neq 0$, *то оператор* $C_1 - \lambda I$ *является нетеровым в* E_1 *и* E_0 *и*

$$\varkappa_1(C_1 - \lambda I) = \varkappa_0(C_1 - \lambda I).$$

3. Пусть $E_\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ — семейство банаховых пространств, промежуточных между E_1 и E_0 и обладающих тем свойством, что при $\alpha < \beta$ пространство E_β непрерывно плотно вложено в E_α.

Предположим семейство E_α обладает нормально интерполяционным свойством относительно самого себя (см. [4]). Если на пространстве E_1 определена последовательность конечномерных операторов P_n, обладающая свойствами: 1) $P_n(x) \to x$ при всяком $x \in E_1$; 2) нормы $\|P_n\|_{E_0}$ равномерно ограничены, то, как доказано в [4], из полной непрерывно-

* Утверждение теоремы 3 по существу содержится в работе [7].

сти оператора T в E_1 или в E_0' и его ограниченности в E_1 и E_0 следует полная непрерывность оператора T в любом из пространств E_α. Для такого семейства пространств E_α справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если оператор C является общим сингулярным оператором в паре пространств E_1, E_0, то он является общим сингулярным оператором в любом из пространств E_α. Спектры оператора C_1, индексы $\varkappa_\alpha(C_1 - \lambda I)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ совпадают и не зависят от того, в каком из пространств E_α рассматривается оператор C_1.*

Пример. В пространстве $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, где Γ — единичная окружность, рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с непрерывными на контуре Γ коэффициентами $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$.

$$A(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz - \lambda\varphi(\zeta) = f(\zeta). \tag{6}$$

Оператор $(S\varphi)(\zeta) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz$ ограничен в $L_p(\Gamma)$ и обладает свойством $S^2 = I$. Пусть U оператор умножения на ζ в пространстве $L_p(\Gamma)$. Алгебра $M(U)$ (см. [2]) совпадает с алгеброй всех непрерывных функций на Γ, а оператор $A \in M(U)$ определяется равенством $(Af)(\zeta) = A(\zeta)f(\zeta)$, где $A(\zeta)$ — функция, соответствующая оператору A. В силу теоремы 1 для любого оператора A из $M(U)$ выполняется условие в). Таким образом, уравнение (6) порождается общим сингулярным оператором, коэффициенты A_1 и A_2 которого являются операторами умножения на непрерывные функции $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$.

Пусть $E(\Gamma)$ — симметричное банахово пространство комплекснозначных измеримых на Γ функций $\varphi(t)$ (см. [8]), фундаментальная функция $\varphi_E(t)$ которого удовлетворяет условиям: $1 < \underline{\lim}\dfrac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)}$, $\overline{\lim}\dfrac{\varphi_E(2t)}{\varphi_E(t)} < 2$.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (6) в пространстве $E(\Gamma)$. В силу интерполяционной теоремы Е. М. Семенова линейный оператор, непрерывный в каждом $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$, непрерывен в $E(\Gamma)$. Следовательно, алгебру $M(U)$ можно рассматривать как алгебру операторов умножения на непрерывные функции в симметричном пространстве $E(\Gamma)$. Оператор S в $E(\Gamma)$, как и в $L_p(\Gamma)$, удовлетворяет условиям а), б) и в). Таким образом, в силу теоремы 2 и наличия регуляризатора (3) уравнение (6) является нетеровым в пространстве $E(\Gamma)$ при всех λ таких, что $A(\zeta) - B(\zeta) - \lambda \neq 0$, $A(\zeta) + B(\zeta) - \lambda \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Ю. И. Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки.— Мат. сб, 1957, **71**, № 3, с. 277—296.
2. Präsdorf Siegfried. Einige klassen singulärer Gleichungen. Berlin, Akad.— Verl., 1974, 12. 353 S.
3. Аткинсон Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах.— Мат. сб., 1951, **28**, № 1, с. 3—14.
4. Крейн С. Г., Петунин Ю. И. Шкалы банаховых пространств.— УМН, 1966, **21**, вып. 2, с. 89—168.
5. Шнейберг И. Я. О допустимых значениях индексов нетеровых операторов в паре банаховых пространств. — Функциональный анализ и его приложения, 1973, **7**, вып. 2, вып. 2, с. 95—96.
6. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1971. 103 с.
7. Кучмент П. А. О нетеровых операторах в паре банаховых пространств.— В кн.: Тр. НИИ математики ВГУ, 1971, вып. 3, с. 61—77.
8. Крейн С. Г. и др., Функциональный анализ, М., «Наука», 1972. 544 с.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию
23.X. 1975 г.