УДК 517.537

П. Е. Антонюк

О равномерном приближении функций на замкнутых множествах с углами

1. В [1] найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(z)$ комплексного переменного на замкнутом множестве $\mathfrak{M}$ с кусочно-гладкой границей, чтобы ее наилучшие приближения $E_n(f)$ многочленами $P_n(z)$ степени не выше n удовлетворяли при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ неравенству

$$E_n(f) \overset{\text{def}}{=} \inf_{P_n} \max_{z \in \mathfrak{M}} |f(z) - P_n(z)| \leqslant An^{-s},$$

где A — постоянная, не зависящая от n, а $s > 0$ не целое.

Данная работа посвящена обратным теоремам равномерного приближения функций многочленами для целых $s \geqslant 1$.

2. Введем необходимые обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть в плоскости (z) задано ограниченное множество $\mathfrak{M}$ с односвязным дополнением $C\mathfrak{M}$ и границей C. Пусть $w = \Phi(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая внешность $\mathfrak{M}$ на $|w| > 1$ так, что выполняются неравенства

$$0 < \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} < +\infty.$$

Обозначаем: $z = \psi(w)$ — функция, обратная к $w = \Phi(z)$; $C_R = \{z : z \in C\mathfrak{M}, |\Phi(z)| = R, R > 1\}$ — R-я линия уровня; $\rho_R(z) = \min_{\zeta \in C_R} |\zeta - z|$, $z \in C$; $\Gamma = \{w : |w| = 1\}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Множеством типа* (D) *назовем замкнутое ограниченное множество* $\mathfrak{M}$ *с односвязным дополнением, если его граница* C *состоит из конечного числа* k *гладких дуг* $C^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ *с непрерывной кривизной, образующих между собой в точках стыка* $z_{(j)}$ *внешние углы* $\alpha_j\pi$, $0 < \alpha_j \leqslant 2$, *и если* $\mathfrak{M}$ *обладает тем свойством, что функцию* $z = \psi(w)$ *в окрестности каждой точки* $w_j = \Phi(z_j)$ *можно представить в виде*

$$\psi(w) = \psi(w_j) + \lambda(w)(w - w_j)^{\alpha_j}, \tag{1}$$

где функция $\lambda(w)$ *непрерывна в окрестности точки* w_j *вдоль* Γ *вместе со своими производными первого и второго порядков и* $\lambda(w_j) \neq 0$.

При произвольном действительном h и произвольном $w \in \Gamma$ обозначаем: $w_h = we^{ih}$, $w_{2h} = we^{2ih}$. Соответствующие точки границы C обозначим $z = \psi(w)$, $z_h = \psi(w_h)$, $z_{2h} = \psi(w_{2h})$. Через A будем обозначать постоянные, не зависящие от n, z, w.

О п р е д е л е н и е 2. *Классом* Z *будем называть класс функций* $f(z)$, *непрерывных на* $\mathfrak{M}$ *и аналитических внутри* $\mathfrak{M}$, *для которых существует* постоянная M, такая, что при всех $w \in \Gamma$ и действительных h выполняется неравенство

$$|\Delta_h^2 f(z)| = |f(z) - 2f(z_h) + f(z_{2h})| \leqslant M|h|. \tag{2}$$

Теорема 1 [2]. *Если модуль некоторого многочлена $P_n(z)$ степени n во всех точках границы C множества типа (D) удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(z)| \leqslant \rho^q_{1+\frac{1}{n}}(z), \quad z \in C, \tag{3}$$

где $q \geqslant 0$, то для модуля его p-й производной имеет место оценка

$$|P_n^{(p)}(z)| \leqslant A\rho^{q-p}_{1+\frac{1}{n}}(z). \tag{4}$$

Теорема 2 [2]. *Если $\mathfrak{M}$ — множество типа (D), то*

$$\rho_R(z) \asymp (R-1)\left[|z - z_j| + (R-1)^{\alpha_j}\right]^{1-\frac{1}{\alpha_j}}, \tag{5}$$

где z_j — ближайшая к z точка стыка кривой C.

3. Перейдем к изложению результатов. Доказательства даются в сокращенном виде.

Лемма 1. *Пусть $w \in \Gamma$ — произвольная точка в окрестности точки w_j и h достаточно малое по модулю, так что w_h и w_{2h} также в окрестности w_j и $|w - w_j| \geqslant |w_{2h} - w_j|$.*

Тогда

$$\left|(z - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} - 2(z_h - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} + (z_{2h} - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}}\right| \leqslant A|w - w_j||h|. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть для определенности $h > 0$. При достаточно малых $h\left(h < \frac{\pi}{2}\right)$, очевидно,

$$|w - 2w_h + w_{2h}| \leqslant h^2, \tag{7}$$

откуда

$$|(w - w_j) - 2(w_h - w_j) + (w_{2h} - w_j)| \leqslant h^2. \tag{8}$$

Из (1) получаем

$$(z - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} = [\lambda(w)]^{\frac{1}{\alpha_j}}(w - w_j). \tag{9}$$

Учитывая свойства функции $\lambda(w)$, получаем

$$\left|(z - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} - 2(z_h - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}} + (z_{2h} - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}}\right| \leqslant \left|[\lambda(w)]^{\frac{1}{\alpha_j}}(w - w_j) -\right.$$

$$\left.- [\lambda(w_h)]^{\frac{1}{\alpha_j}}(w - w_j)\right| + \left|[\lambda(w_h)]^{\frac{1}{\alpha_j}}[(w - w_j) - 2(w_h - w_j) + (w_{2h} - w_j)]\right| +$$

$$+ \left|[\lambda(w_h)]^{\frac{1}{\alpha_j}}(w_{2h} - w_j) - [\lambda(w_{2h})]^{\frac{1}{\alpha_j}}(w_{2h} - w_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |w - w_j|\left\{\left|\int_{w_h}^{w} \frac{1}{\alpha_j}[\lambda(\tau)]^{\frac{1}{\alpha_j}-1}\lambda'(\tau)\,d\tau\right| +\right.$$

$$\left. + \left|\int_{w_{2h}}^{w_h} \frac{1}{\alpha_j}[\lambda(\tau)]^{\frac{1}{\alpha_j}-1}\lambda'(\tau)\,d\tau\right|\right\} + Ah^2 \leqslant A|w - w_j||h|.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Если для функции $f(z)$ на множестве $\mathfrak{M}$ типа (D) при каждом натуральном n существует алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени n такой, что*

$$\max_{z\in\mathfrak{M}} |f(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{A}{n}, \tag{10}$$

то

1) *в случае, когда* $\min\{\alpha_j\} > 1$,

$$f(z) \in Z; \tag{11}$$

2) *в случае, когда* $\min\{\alpha_j\} < 1$, *функцию* $f(z)$ *можно представить в виде*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j(z) [\varphi_j(z) + Q_j(z)], \tag{12}$$

где $\pi_j(z)$ — *многочлены, удовлетворяющие тождеству*

$$\sum_{j=1}^{k} \pi_j(z) \prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{k} (z - z_\lambda)^{l+1} \equiv 1, \quad l = \max_j \left[\frac{1}{\alpha_j}\right], \tag{13}$$

$Q_j(z)$ — *многочлены степени*

$$l_j + (k-1)(l+1), \quad l_j = \left[\frac{1}{\alpha_j}\right], \tag{14}$$

$\varphi_j(z)$ — *функции, удовлетворяющие условиям*

$$\varphi_j(z) \in Z, \ \varphi_j(z_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{15}$$

Доказательство. 1) Если $\min\{\alpha_j\} > 1$, то вследствие (10) для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots$ найдем многочлен $P_{2^i}(z)$ и представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = P_1(z) + \sum_{i=1}^{\infty} [P_{2^i}(z) - P_{2^{i-1}}(z)] = \sum_{i=0}^{\infty} U_{2^i}(z), \tag{16}$$

где $U_{2^i}(z)$ — многочлены, удовлетворяющие неравенству

$$|U_{2^i}(z)| \leqslant \frac{A}{2^i}, \quad z \in \mathfrak{M}. \tag{17}$$

По теореме 1 для всех $z \in C$ и $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$|U_{2^i}^{(\nu)}(z)| \leqslant \frac{A}{2^i [\rho_{1+\frac{1}{2^i}}(z)]^\nu}. \tag{18}$$

Рассмотрим

$$|\Delta_h^2 f(z)| = |f(z) - 2f(z_h) + f(z_{2h})|. \tag{19}$$

Для произвольного натурального N, учитывая (17), получим

$$|\Delta_h^2 f(z)| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} |U_{2^i}(z) - 2U_{2^i}(z_h) + U_{2^i}(z_{2h})| + A2^{-N}. \tag{20}$$

Выберем N так, чтобы

$$2^N \leqslant \frac{1}{h} < 2^{N+1}. \tag{21}$$

Оценим первое слагаемое в (20). Для этого представим вторую разность многочленов в виде интеграла

$$|U_{2^i}(z)-2U_{2^i}(z_h)+U_{2^i}(z_{2h})|=\left|\int_0^h dt_1\int_0^h dt_2\{U''_{2^i}(z_{t_1+t_2})\psi'^2(w_{t_1+t_2})e^{2i(\Theta+t_1+t_2)}i^2+\right.$$

$$+U'_{2^i}(z_{t_1+t_2})\psi''(w_{t_1+t_2})e^{2i(\Theta+t_1+t_2)}i^2+$$

$$\left.+U'_{2^i}(z_{t_1+t_2})\psi'(w_{t_1+t_2})e^{i(\Theta+t_1+t_2)}i^2\}\right|\leqslant\int_0^h dt_1\int_0^h dt_2\{|U''_{2^i}(\zeta)||\psi'(\tau)|^2+$$

$$+|U'_{2^i}(\zeta)||\psi''(\tau)|+|U'_{2^i}(\zeta)||\psi'(\tau)|\}, \tag{22}$$

где обозначено $z_{t_1+t_2}=\zeta$, $w_{t_1+t_2}=\tau$. Используя (18) и теорему 2, получаем

$$\sum_{i=0}^{N-1}|U_{2^i}(z)-2U_{2^i}(z_h)+U_{2^i}(z_{2h})|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^h dt_1\int_0^h dt_2\left\{\frac{A|\tau-w_j|^{2(\alpha_j-1)}}{2^i\dfrac{1}{2^{2i}}\left[|\tau-w_j|+\dfrac{1}{2^i}\right]^{2(\alpha_j-1)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{A|\tau-w_j|^{\alpha_j-2}}{\left[|\tau-w_j|+\dfrac{1}{2^i}\right]^{\alpha_j-1}}+\frac{A|\tau-w_j|^{\alpha_j-1}}{\left[|\tau-w_j|+\dfrac{1}{2^i}\right]^{\alpha_j-1}}\right\}. \tag{23}$$

Оцениваем (23), рассматривая отдельно случаи, когда точка $z\in C$ лежит вне окрестностей угловых точек z_j или в одной из фиксированных окрестностей. В обоих случаях получим

$$\sum_{i=0}^{N-1}|U_{2^i}(z)-2U_{2^i}(z_h)+U_{2^i}(z_{2h})|\leqslant Ah. \tag{24}$$

Из (19), (21), (24) получим доказательство (11).

2) Если $\min\{\alpha_j\}<1$, то представим, как и в 1), функцию $f(z)$ в виде (16), (17). Построим функции

$$f_j(z)=f(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{k}(z-z_\lambda)^{l+1},\quad j=1,2,\ldots,k, \tag{25}$$

и покажем, что каждую функцию $f_j(z)$ можно представить в виде

$$f_j(z)=\varphi_j(z)+Q_j(z), \tag{26}$$

где $\varphi_j(z)$ удовлетворяют (15). Из (17), (4), (5)

$$|U_{2^i}^{(\nu)}(z)|\leqslant\frac{A}{2^{i(1-\nu\alpha_j)}},\quad \nu=0,1,2,\ldots \tag{27}$$

а) Если $\dfrac{1}{\alpha_j}$ — не целое, то $1-l_j\alpha_j>0$ и ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty}U_{2^i}^{(\nu)}(z_j)=B_j^{(\nu)}$ абсолютно сходятся при $\nu=0,1,2,\ldots,l_j$. Введем многочлены

$$Q_{l_j}(z)=\sum_{\nu=0}^{l_j}B_j^{(\nu)}\frac{(z-z_j)^\nu}{\nu!} \tag{28}$$

и $f_j(z)$ представим в виде

$$f_j(z)=[f(z)-Q_{l_j}(z)]\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{k}(z-z_\lambda)^{l+1}+Q_{l_j}(z)\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{k}(z-z_\lambda)^{l+1}\stackrel{\text{def}}{=}\varphi_j(z)+Q_j(z). \tag{29}$$

Рассматривая $\Delta_h^2\varphi_j(z)$, как в (19) и (22) доказываем, что $\varphi_j(z)$ удовлетворяет условиям (15).

б) Если $\dfrac{1}{\alpha_j}=l_j$ — целое, то строим функции $f_j(z)$ по (25), но из (27) следует, что при $\nu=0,1,2,\ldots,l_j-1$ ряды $\sum\limits_{i=0}^{\infty}U_{2^i}^{(\nu)}(z_j)$ абсолютно сходятся, а о ряде $\sum\limits_{i=0}^{\infty}U_{2^i}^{(l_j)}(z_j)$ этого утверждать нельзя. Обозначим $\sum\limits_{i=0}^{\infty}U_{2^i}^{(\nu)}(z_j)=$ $=B_j^{(\nu)}$, $\nu=0,1,2,\ldots,l_j-1$, и построим многочлены степени (l_j-1)

$$Q_{l_j}(z)=\sum_{\nu=0}^{l_j-1}B_j^{(\nu)}\frac{(z-z_j)^{\nu}}{\nu!}. \tag{30}$$

Функцию $f_j(z)$ представляем в виде (29) и доказываем, что $\varphi_j(z)$ удовлетворяет (15). Рассматривая отдельно случаи, когда точка z лежит вне окрестностей угловых точек, в окрестностях точек z_μ, $\mu\neq j$, и когда z лежит в окрестности точки z_j, остановимся на случае, когда z лежит в окрестности точки z_j. При произвольном натуральном N

$$|\varphi_j(z)|=\left|\sum_{i=0}^{\infty}U_{2^i}(z)-\sum_{\nu=0}^{l_j-1}B_j^{(\nu)}\frac{(z-z_j)^{\nu}}{\nu!}\right|\left|\prod_{\substack{\lambda=1\\ \lambda\neq j}}^{k}(z-z_\lambda)^{l+1}\right|\overset{\text{def}}{=}|S_j(z)||\Pi_j(z)|\leqslant$$

$$\leqslant A\left\{\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{z_j}^{z}|d\zeta_1|\int\limits_{z_j}^{\zeta_1}|d\zeta_2|\ldots\int\limits_{z_j}^{\zeta_{l_j-1}}|U_{2^i}^{(l_j)}(\zeta_{l_j})||d\zeta_{l_j}|+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=N}^{\infty}|U_{2^i}(z)|+\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{l_j-1}|U_{2^i}^{(\nu)}(z_j)|\frac{|z-z_j|^{\nu}}{\nu!}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A\left\{|z-z_j|^{\frac{l_j}{\alpha_j}}2^{N(l_j-1)}+N|z-z_j|^{\frac{1}{\alpha_j}}+\frac{1}{2^N}+\sum_{\nu=0}^{l_j-1}\frac{|z-z_j|^{\nu}}{2^{N(1-\nu\alpha_j)}}\right\}. \tag{31}$$

Выбирая N так, чтобы

$$2^N\leqslant\frac{1}{|z-z_j|^{\frac{1}{\alpha_j}}}<2^{N+1}, \tag{32}$$

откуда $N\leqslant\dfrac{1}{\alpha_j}|\log_2|z-z_j||$, и подставляя в (31), получаем

$$|\varphi_j(z)|\leqslant A|z-z_j|^{\frac{1}{\alpha_j}}|\log_2|z-z_j||. \tag{33}$$

Оцениваем вторую разность функции $\varphi_j(z)$. Когда $|w-w_j|\asymp h$, оценки проводить проще. Остановимся на случае $|w-w_j|>h$. Легко показать, что

$$|\Delta_h^2\varphi_j(z)|\leqslant Ah+|\Delta_h^2S_j(z)|. \tag{34}$$

Оценим $\Delta_h^2S_j(z)$. При произвольных натуральных $N<\widetilde{N}$ представим $\Delta_h^2S_j(z)$ в виде

$$|\Delta_h^2 S_j(z)| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left[U_{2^i}(z) - \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z-z_j)^\nu}{\nu!} \right] + \sum_{i=N}^{\widetilde{N}-1} U_{2^i}(z) + \sum_{i=\widetilde{N}}^{\infty} U_{2^i}(z) - \right.$$

$$- \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z-z_j)^\nu}{\nu!} - 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left[U_{2^i}(z_h) - \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z_h-z_j)^\nu}{\nu!} \right] -$$

$$- 2 \sum_{i=N}^{\widetilde{N}-1} U_{2^i}(z_h) - 2 \sum_{i=\widetilde{N}}^{\infty} U_{2^i}(z_h) + 2 \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z_h-z_j)^\nu}{\nu!} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \left[U_{2^i}(z_{2h}) - \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z_{2h}-z_j)^\nu}{\nu!} \right] +$$

$$\left. + \sum_{i=N}^{\widetilde{N}-1} U_{2^i}(z_{2h}) + \sum_{i=\widetilde{N}}^{\infty} U_{2^i}(z_{2h}) - \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{l_j-1} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z_{2h}-z_j)^\nu}{\nu!} \right|.$$

В суммах $\sum\limits_{i=0}^{N-1}$ прибавим и отнимем слагаемые вида $U_{2^i}^{(l_j)}(z_j) \dfrac{(z-z_j)^{l_j}}{l_j!}$ и представим остатки рядов Тэйлора в интегральной форме

$$U_{2^i}(z) - \sum_{\nu=0}^{l_j} U_{2^i}^{(\nu)}(z_j) \frac{(z-z_j)^\nu}{\nu!} = \int_{z_j}^{z} d\zeta_1 \int_{z_j}^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_{z_j}^{\zeta_{l_j}} U_{2^i}^{(l_j+1)}(\zeta_{l_j+1})\, d\zeta_{l_j+1}.$$

Получим

$$|\Delta_h^2 S_j(z)| \leqslant \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left[\int_{z_j}^{z} d\zeta_1 \ldots \int_{z_j}^{\zeta_{l_j}} U_{2^i}^{(l_j+1)}(t)\, dt - 2 \int_{z_j}^{z_h} d\zeta_1 \ldots \int_{z_j}^{\zeta_{l_j}} U_{2^i}^{(l_j+1)}(t)\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{z_j}^{z_{2h}} d\zeta_1 \ldots \int_{z_j}^{\zeta_{l_j}} U_{2^i}^{(l_j+1)}(t)\, dt \right] \right| + \left| \sum_{i=N}^{\widetilde{N}-1} [U_{2^i}(z) - 2U_{2^i}(z_h) + U_{2^i}(z_{2h})] \right| +$$

$$+ 4 \left| \sum_{i=\widetilde{N}}^{\infty} U_{2^i}(z) \right| + \left| \sum_{i=N}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{l_j-1} [(z-z_j)^\nu - (z_h-z_j)^\nu + (z_{2h}-z_j)^\nu] \frac{U_{2^i}^{(\nu)}(z_j)}{\nu!} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{N-1} \frac{U_{2^i}^{(l_j)}(z_j)}{l_j!} [(z-z_j)^{l_j} - 2(z_h-z_j)^{l_j} + (z_{2h}-z_j)^{l_j}] \right|. \qquad (35)$$

Выбираем N и $\widetilde{N}$ так, чтобы

$$2^N \leqslant \frac{1}{|w-w_j|} < 2^{N+1}, \quad 2^{\widetilde{N}} \leqslant \frac{1}{h} < 2^{\widetilde{N}+1}, \qquad (36)$$

и оцениваем каждую сумму в (35). Не приводя здесь громоздких выкладок, ограничимся замечаниями. При оценке первой суммы используем (17) и теорему 1. При оценке второй суммы, кроме того, воспользуемся условием $\widetilde{N}-N \leqslant \log_2 \frac{|w-w_j|}{h} \overset{\text{def}}{=} \log_2 q$, где $q>1$ и тогда $\frac{\log_2 q}{q} \leqslant A$.

При оценке пятой суммы используем существенно результаты леммы 1 (оценку (6)).

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{U_{2^i}^{(l_j)}(z_j)}{l_j!}\left[(z-z_j)^{l_j}-2(z_h-z_j)^{l_j}+(z_{2h}-z_j)^{l_j}\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant AN|w-w_j|h \leqslant A|\log_2|w-w_j|||w-w_j|h \leqslant Ah. \tag{37}$$

Получим аналогичную оценку всех сумм в (35). Отсюда $|\Delta_h^2 S_j(z)| \leqslant Ah$, и вследствие (34) получим доказательство теоремы.

Теорема 4. *Пусть при некотором целом $r \geqslant 1$ для функции $f(z)$, заданной на множестве $\mathfrak{M}$ типа (D), при каждом натуральном n существует алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени n такой, что при всех $z \in \mathfrak{M}$*

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant \frac{A}{n^{r+1}}, \tag{38}$$

где A — постоянная, не зависящая от n.

Тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k} \pi_j(z) \int_{z_j}^{z} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1-z_j)^{1-\frac{1}{\alpha_j}}} \cdots \int_{z_j}^{\zeta_{r-1}} \frac{\varphi_j(\zeta_r)}{(\zeta_r-z_j)^{1-\frac{1}{\alpha_j}}} d\zeta_r + Q(z), \tag{39}$$

где функции $\varphi_j(z)$ удовлетворяют условиям (15), *$\pi_j(z)$ — многочлены, удовлетворяющие тождеству* (13), *$Q(z)$ — многочлен степени не выше $r+l$.*

Метод доказательства этой теоремы аналогичен методу доказательства теоремы 3 с некоторыми осложнениями в выкладках. Приводить доказательство не будем.

4. Заметим, что вместе с теоремами работы [4] теорема 3 дает необходимое и достаточное условие приближения функции многочленами степени n с точностью $\frac{1}{n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык В. К., Алибеков Г. А. О равномерном приближении функций комплексного переменного на замкнутых множествах с углами.— Мат. сб., 1968, **75**, вып. **4**, с. 502—557.
2. Дзядык В. К. О проблеме С. М. Никольского в комплексной области.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, **23**, № 5, с. 697—736.
3. Антонюк П. Є. До обернених теорем рівномірного наближення функцій, неперервних на замкнених множинах з кутами.— Допов. УРСР. Сер. А., 1968, № 9, с. 771—773.
4. Антонюк П. Є. До рівномірного наближення функцій неперервних на замкнених множинах з кутами.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1971, № 6, с. 487—489.

Луцкий
педагогический институт

Поступила в редакцию
19.IV. 1975 г.