УДК 517.978.53

С. Атдаєв, С. Аширов

Дослідження розв'язків нелінійних багатовимірних операторних рівнянь Вольтерра

Нехай E — деякий банахів простір. Через E_T $(T = (T^1, \ldots, T^p))$ позначимо простір неперервних абстрактних функцій $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T;\ t = (t^1, \ldots, t^p))$ із значеннями з E і з нормою

$$\| x(t) \|_{E_T} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \|_E ,$$

а через S_T — кулю з E_T з центром в точці x_0 і радіусом r.

Роботу присвячено дослідженню розв'язків рівняння

$$x(t) = x_0 + F(t, x_t) \tag{1}$$

в просторі E_T, де $F(t, x_t)$ — нелінійний багатовимірний оператор Вольтерра, тобто при кожному фіксованому $t \in [0, T]$ він діє з E_t в E. У випадку, коли $p = 1$, рівняння (1) раніше досліджено в роботах [1—4] та ін., а у випадку, коли $F(t, x_t)$ — багатовимірний інтегральний оператор, — в роботі [5] та ін.

1. Перш ніж перейти до дослідження розв'язків рівняння (1), наведемо деякі теореми про багатовимірні інтегральні нерівності, які використовуватимуться пізніше.

Теорема 1 (пор. [6, 7]). Нехай $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — *невід'ємна сумовна функція. Нехай невід'ємна функція* $u_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ *має неперервну невід'ємну частинну похідну щодо однієї із змінних* t^i $(i = \overline{1,p})$, *а щодо решти — не спадає, і, крім того,* $\omega(u)$ — *додатна неперервна неспадна функція для* $u > 0$ *і* $\omega(0) \geqslant 0$. *Нехай, нарешті, невід'ємна неперервна функція* $v(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ *задовольняє інтегральну нерівність*

$$v(t) \leqslant u_0(t) + \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, \omega[v(s)]\, ds^1 \ldots ds^p . \tag{2}$$

Тоді справджується нерівність

$$v(t) \leqslant G^{-1} \left[G(u_0(t)) + \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, ds^1 \ldots ds^p \right],$$

де $G(u)$ — *деяка первісна функції* $\dfrac{1}{\omega(u)}$, *а* G^{-1} — *обернена функція відносно* $G(u)$.

Доведення. Позначаючи праву частину нерівності (2) через $z(t)-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ — досить мале число), маємо

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t^1}=\frac{\partial u_0(t)}{\partial t^1}+\int\limits_0^{t^2}\cdots\int\limits_0^{t^p}\varphi(t^1,s^2,\ldots,s^p)\,\omega[v(t^1,s^2,\ldots,s^p)]\,ds^2\ldots ds^p.$$

Звідси, враховуючи неспадання функції $\omega(u)$, одержуємо

$$\frac{\partial G(z(t))}{\partial t^1}\leqslant\frac{\partial G(u_0(t)+\varepsilon)}{\partial t^1}+\int\limits_0^{t^2}\cdots\int\limits_0^{t^p}\varphi(t^1,s^2,\ldots,s^p)\,ds^2,\ldots ds^p,$$

тобто

$$G(z(t))\leqslant G(u_0(t)+\varepsilon)+\int\limits_0^{t^1}\cdots\int\limits_0^{t^p}\varphi(s)\,ds^1\ldots ds^p.$$

Звідси

$$z(t)\leqslant G^{-1}\left[G(u_0(t)+\varepsilon)+\int\limits_0^{t^1}\cdots\int\limits_0^{t^p}\varphi(s)\,ds^1\ldots ds^p\right]. \tag{3}$$

Переходячи в нерівності (3) до границі при $\varepsilon\to0$, одержуємо вірність твердження теореми.

Теорема 2 (пор. [8]). *Нехай невід'ємна неперервна функція $v(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ задовольняє систему інтегральних нерівностей:*

$$v(t)\leqslant\int\limits_0^{t^1}\cdots\int\limits_0^{t^p}\frac{k}{\prod\limits_{i=1}^{p}s^i}\,v(s)\,ds^1\ldots ds^p,$$

$$v(t)\leqslant\int\limits_0^{t^1}\cdots\int\limits_0^{t^p}\frac{c}{\left(\prod\limits_{i=1}^{p}s^i\right)^{\beta}}\,v^{\alpha}(s)\,ds^1\ldots ds^p,$$

де c, k, α — додатні сталі, причому $0<\alpha<1$, $\beta<\alpha$ і $k(1-\alpha)^p<<(1-\beta)^p$.

Тоді $v(t)\equiv0$ на $[0,T]$.

Доведення. Позначаючи $M=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}v(t)$, можна легко показати, що

$$v(t)\leqslant\frac{c^{1+\alpha+\ldots+\alpha^m}M^{\alpha^{m+1}}}{(1-\beta)^{p(1+\alpha+\ldots+\alpha^m)}}\left(\prod_{i=1}^{p}t^i\right)^{(1-\beta)(1+\alpha+\ldots+\alpha^m)}.$$

Звідси

$$v(t)\leqslant\frac{c^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1-\beta)^{\frac{p}{1-\alpha}}}\left(\prod_{i=1}^{p}t^i\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}. \tag{4}$$

Визначимо функцію $Q(t)$ так:

$$Q(t)=\begin{cases}\left(\prod\limits_{i=1}^{p}t^i\right)^{-\sqrt[p]{k}}v(t), & \text{якщо } t\in[0,T]/\Gamma,\\ 0, & \text{якщо } t\in\Gamma,\end{cases}$$

де Γ — множина точок граней відрізка $[0,T]$ розмірності $r_1\leqslant p-1$.

З оцінки (4) випливає, що

$$0 \leqslant Q(t) \leqslant \frac{c^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(1-\beta)^{\frac{p}{1-\alpha}}} \left(\prod_{i=1}^{p} t^i \right)^{\frac{1-\beta-\sqrt[p]{k}(1-\alpha)}{1-\alpha}} .$$

Отже, маємо $\lim\limits_{t \to t_0} Q(t) = 0$, де $t \in [0, T]/\Gamma$, $t_0 \in \Gamma$, тобто функція $Q(t)$ неперервна на $[0, T]$.

Тепер залишається показати, що $Q(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Припустимо супротивне. Нехай існує точка $\bar{t} \in [0, T]/\Gamma$ така, що $Q(\bar{t}) > 0$ і $Q(\bar{t}) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} Q(t)$. Тоді маємо

$$Q(\bar{t}) = \left(\prod_{i=1}^{p} \bar{t}^i \right)^{-\sqrt[p]{k}} v(\bar{t}) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{p} \bar{t}^i \right)^{-\sqrt[p]{k}} \int_0^{\bar{t}^1} \cdots \int_0^{\bar{t}^p} \frac{k}{\prod\limits_{i=1}^{p} s^i} v(s)\, ds^1 \ldots ds^p =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{p} \bar{t}^i \right)^{-\sqrt[p]{k}} \int_0^{\bar{t}^1} \cdots \int_0^{\bar{t}^p} k \left(\prod_{i=1}^{p} s^i \right)^{\sqrt[p]{k}-1} Q(s)\, ds^1 \ldots ds^p < Q(\bar{t}),$$

що суперечить припущенню. Теорему доведено.

2. Перейдемо до дослідження розв'язків рівняння (1). Для наближеного розв'язку рівняння (1) побудуємо послідовні наближення Пікара:

$$x^{(0)}(t) = x_0, \qquad x^{(n)}(t) = x_0 + F[t, x_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Теорема 3. *Нехай оператор $F(t, x_t)$ визначений на топологічному добутку $R = [0, T] \times S_T$, неперервний і задовольняє умову*

$$\| F(t, x_t) - F(t, y_t) \| \leqslant \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, \omega(\| x(s) - y(s) \|)\, ds^1 \ldots ds^p, \tag{6}$$

де $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — сумовна функція, $\omega(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 2r)$ — неспадна функція Осгуда. Нехай, крім того,

$$\max_R \| F(t, x_t) \| \leqslant r. \tag{7}$$

Нехай, нарешті, справджується умова

а) *сім'я абстрактних функцій $\{F(t, x_t)\}_{x \in S_T}$ рівномірно неперервна.*

Тоді послідовні наближення Пікара (5) збігаються до єдиного розв'язку рівняння (1).

Доведення. Доведемо, що $\{x^{(n)}(t)\}$, визначена рівностями (5), фундаментальна. Маємо

$$v^{(n,m)}(t) \leqslant \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, \omega[v^{(n-1,\, m-1)}(s)]\, ds^1 \ldots ds^p, \tag{8}$$

де $v^{(n,m)}(t) = \| x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t) \|$.

Покладемо $z^{(n)}(t) = \sup\limits_{n',m' \geqslant n} v^{(n',m')}(t)$. Очевидно, що $\{z^{(n)}(t)\}$ не зростає і збігається. Нехай $z(t) = \lim\limits_{n\to\infty} z^{(n)}(t)$. З нерівності (8) маємо

$$v^{(n,m)}(t) \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega[z^{(n-1)}(s)]\,ds^1 \dots ds^p .$$

Оскільки ця нерівність справджується при всіх n, то при $p' = 1, 2, \dots$ одержимо

$$v^{(n+p',m)}(t) \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega[z^{(n+p'-1)}(s)]\,ds^1 \dots ds^p .$$

Звідси, використовуючи незростання $\{z^{(n)}(t)\}$, запишемо

$$v^{(n+p',m)}(t) \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega[z^{(n-1)}(s)]\,ds^1 \dots ds^p .$$

Враховуючи вірність останньої нерівності при всіх $p' = 1, 2. \dots$, маємо

$$z^{(n)}(t) \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega[z^{(n-1)}(s)]\,ds^1 \dots ds^p .$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$ в обох частинах цієї нерівності одержуємо

$$z(t) \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega[z(s)]\,ds^1 \dots ds^p .$$

Враховуючи, що $z(t)$ — неперервна функція (в силу умови а) теореми) з останньої нерівності, користуючись теоремою 1, маємо $z(t) \equiv 0$, тобто $\{x^{(n)}(t)\}$ — фундаментальна. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}(t) = x(t)$. З оцінки

$$\| F[t, x_t^{(n-1)}] - F(t, x_t) \| \leqslant \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega(\| x^{(n-1)}(s) - x(s) \|)\,ds^1 \dots ds^p$$

випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} F[t, x_t^{(n-1)}] = F(t, x_t)$, тобто $x(t)$ є розв'язком рівняння (1), єдиність якого очевидна.

Зауваження 1. Зазначимо, що у випадку, коли

$$F(t, x_t) \equiv \int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} K[t, s;\ x(s)]\,ds^1 \dots ds^p ,$$

для виконання умови а) теореми 3 досить виконання умови

$$\lim_{\substack{t_1 \to t_2 \\ 0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant T}} \int\limits_0^{t_1^1} \dots \int\limits_0^{t_1^p} | K[t_1, s;\ x(s)] - K[t_2, s;\ x(s)] |\,ds^1 \dots ds^p = 0$$

при всіх $x(t) \in S_T$.

Принципом порівняння легко доводиться така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконані всі умови теореми 3, лише з тією різницею, що умова* а) *замінена умовою:* $\int\limits_0^{t^1} \dots \int\limits_0^{t^p} \varphi(s)\,\omega(2r)\,ds^1 \dots ds^p \leqslant 2r$.

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (1), *і цей розв'язок є границею послідовних наближень Пікара, причому швидкість збіжності* $x^{(n)}(t)$ *до розв'язку* $x(t)$ *рівняння* (1) *оцінюється за формулою*

$$\| x^{(n)}(t) - x(t) \| \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

де $\varepsilon^{(n)}(t)$ *визначаються рівностями*

$$\varepsilon^{(1)}(t) = \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, \omega(2r)\, ds^1 \ldots ds^p,$$

$$\varepsilon^{(n+1)}(t) = \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \varphi(s)\, \omega[\varepsilon^{(n)}(s)]\, ds^1 \ldots ds^p \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

і $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon^{(n)}(t) = 0$ *рівномірно щодо* $t \in [0, T]$.

Зауваження 2. Якщо взяти

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i), \quad \omega(u) = u,$$

де $K_i(s^i)$ $(0 \leqslant s^i \leqslant T^i;\ i = \overline{1, p})$ — сумовні відповідно на відрізках $[0, T^i]$ $(i = \overline{1, p})$ функції і додатково припустити, що

$$\prod_{i=1}^{p} \left(\int_0^{t^i} K_i(s^i)\, ds^i \right) \leqslant 1, \tag{9}$$

тоді функції $\varphi(s)$ і $\omega(u)$ задовольняють умови теореми 4 і твердження цієї теореми залишається в силі, причому швидкість збіжності визначається нерівністю

$$\| x^{(n)}(t) - x(t) \| \leqslant 2r \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \left(\int_0^{t^i} K_i(s^i)\, ds^i \right)^n}{(n!)^p}.$$

Звичайним методом можна довести таку теорему, яка показує, що в цьому частинному випадку умова (9) є зайвою.

Теорема 5. *Нехай оператор* $F(t, x_t)$ *визначений в* R, *неперервний і задовольняє умову*

$$\| F(t, x_t) - F(t, y_t) \| \leqslant \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i)\, \| x(s) - y(s) \|\, ds^1 \ldots ds^p,$$

де $K_i(s^i)$ $(0 \leqslant s^i \leqslant T^i;\ i = \overline{1, p})$ — *сумовні відповідно на відрізках* $[0, T^i]$ $(i = \overline{1, p})$ *функції. Нехай, крім того, виконується умова* (7).

Тоді рівняння (1) *має єдиний розв'язок, і цей розв'язок є границею послідовних наближень* (5). *Швидкість збіжності* $x^{(n)}(t)$ *до розв'язку* $x(t)$ *рівняння* (1) *визначається нерівністю*:

$$\| x^{(n)}(t) - x(t) \| \leqslant r \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \left(\int_0^{t^i} K_i(s^i)\, ds^i \right)^n}{(n!)^p}.$$

Зауваження 3. Зазначимо, що твердження теорем 4 і 5 залишаються в силі і в тому випадку, якщо умову (6) замінити більш загальною умовою $\| F(t, x_t) - F(t, y_t) \| \leqslant \varphi(t, \| x_t - y_t \|)$, де нелінійний скалярний багатовимірний оператор Вольтерра $\varphi(t, u_t)$ не спадає по другому аргументу і рівняння $u(t) = \varphi(t, u_t)$ має лише нульовий розв'язок.

Теорема 6. *Нехай оператор $F(t, x_t)$ визначений в R, неперервний і задовольняє умову*

$$\| F(t, x_t) - F(t, y_t) \| \leqslant \int_0^{t^1} \ldots \int_0^{t^p} \min \left\{ \frac{c}{\left(\prod_{i=1}^{p} s^i \right)^{\beta}} \| x(s) - y(s) \|^{\alpha}, \frac{k}{\prod_{i=1}^{p} s^i} \| x(s) - y(s) \| \right\} ds^1 \ldots ds^p,$$

де c, k, α — додатні сталі, причому $0 < \alpha < 1$, $\beta < \alpha$ і $k(1-\alpha)^p < (1-\beta)^p$.

Тоді рівняння (1) *має не більше одного розв'язку. Якщо додатково зробити припущення про справджуваність умови* а) *теореми* 3 *і умови* (7), *тоді рівняння* (1) *має єдиний розв'язок, і воно є границею наближень Пікара.*

Доведення. Використовуючи теорему 2, звичайним способом легко можна довести єдиність розв'язку рівняння (1). Доведемо існування розв'язку рівняння (1) і збіжність до нього послідовних наближень Пікара.

Запровадимо позначення $v^{(n,m)}(t) = \| x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t) \|$.

Маємо

$$v^{(n,m)}(t) \leqslant \int_0^{t^1} \int_0^{t^p} \min \left\{ \frac{c}{\left(\prod_{i=1}^{p} s^i \right)^{\beta}} [v^{(n-1, m-1)}(s)]^{\alpha}, \frac{k}{\prod_{i=1}^{p} s^i} v^{(n-1, m-1)}(s) \right\} ds^1 \ldots ds^p.$$

Покладемо

$$W^{(n)}(t) = \sup_{n', m' \geqslant n} v^{(n', m')}(t).$$

Очевидно, що $\{W^{(n)}(t)\}$ не зростає і збігається. Позначимо $W(t) = \lim\limits_{n \to \infty} W^{(n)}(t)$. Аналогічно, як в теоремі 3, можна показати, що

$$W(t) \leqslant \int_0^{t^1} \ldots \int_0^{t^p} \min \left\{ \frac{c}{\left(\prod_{i=1}^{p} s^i \right)^{\beta}} W^{\alpha}(s), \quad \frac{k}{\prod_{i=1}^{p} s^i} W(s) \right\} ds^1 \ldots ds^p.$$

Звідси, користуючись теоремою 2, одержуємо, що $W(t) \equiv 0$, тобто $\{x^{(n)}(t)\}$, визначена рівностями (5), збігається. Якщо покласти $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)}(t) = x(t)$, то очевидно, що $x(t)$ є розв'язком рівняння (1).

3. Наведемо деякі приклади рівняння (1).

Розглянемо таку задачу Гурса

$$\begin{gathered} \frac{\partial^p x}{\partial t^1 \ldots \partial t^p} = f(t^1, \ldots, t^p, x), \\ x/_{t^i = 0} = \sigma_i(t^1, \ldots, t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots, t^p) \quad (0 \leqslant t^i \leqslant T^i;\ i = \overline{1, p}), \end{gathered} \tag{10}$$

де $\sigma_i(t^1, \ldots, t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots, t^p)$ $(i = \overline{1, p})$ мають частинні похідні по $t^1, \ldots, t^{i-1}, t^{i+1}, \ldots, t^p$ і задовольняють умови спряження $f(t, x)$ $(0 \leqslant t \leqslant T;$ $|x| \leqslant r)$ — неперервна функція.

Очевидно, що задача (10) еквівалентна багатовимірному нелінійному інтегральному рівнянню

$$x(t) = x_0(t) + \int\limits_0^{t^1} \ldots \int\limits_0^{t^p} f[s, x(s)]\, ds^1 \ldots ds^p,$$

де функція $x_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ виражається через початкові дані.

Якщо в рівнянні (1) покласти

$$F(t, x_t) \equiv \int\limits_0^{t^1} \ldots \int\limits_0^{t^p} f[s, x(s)]\, ds^1 \ldots ds^p$$

і прийняти $E = (-\infty, \infty)$, то легко можна перевірити, що з теорем 3, 4 і 6 як частинні випадки одержуються твердження, які збігаються з відповідними результатами робіт [9—11].

Нехай $E = (-\infty, \infty)$. Тоді за другий приклад рівняння (1) можна взяти інтегро-функціональне рівняння Вольтерра

$$x(t) = x_0 + \Phi\left\{t, \int\limits_0^{t^1} \ldots \int\limits_0^{t^p} K[t, s;\ x(s)]\, ds^1 \ldots ds^p\right\}.$$

Отже, одержані в попередньому пункті загальні теореми за стандартною схемою можна застосовувати і до дослідження розв'язків цього рівняння.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики.— Бюлл. Московск. ун-та. Секция А, 1938, вып. 8, с. 1—25.
2. Мамедов Я. Д. К теории решений нелинейных операторных уравнений типа Вольтерра.— Сиб. мат. журн., 1964, **5**, № 6, с. 1305—1316.
3. Квапиш М. О существовании и единственности решения и сходимости последовательных приближений для функциональных уравнений типа Вольтерра в банаховом пространстве.— Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Ун-т дружбы народов, 1967, **4**, с. 123—138.
4. Цалюк З. Б. К вопросу о сходимости последовательных приближений.— Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Ун-т дружбы народов, 1969, **7**, с. 67—74.
5. Мамедов Я. Д., Перов А. И. О многомерных интегральных уравнениях и неравенствах типа Вольтерра.— Изв. АН АзССР. Сер. физ-техн. и мат. наук, 1965, № 1, с. 7—19.
6. Аширов С., Атдаев С. Об одном обобщении неравенства Беллмана. Изв. АН ТуркмССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1973, № 3, с. 102—104.
7. Аширов С., Атдаев С. Об одном интегральном неравенстве.— В кн.: Математика. Ашхабад, Изд-во Туркм. гос. ун-та, 1973, с. 12—17.
8. Palczewski B. On the uniqueness of solutions and the convergence of successive approximations in the Darboux problem under the conditions of the Krasnosielski and Krein type.— Ann. Polon. math., 1964, **14**, № 2, p. 183—190.
9. Guglielmino F. Sulla rizoluzione del problema di Darboux per l'equazione S = f(x, y, z).— Boll. della unione Math. Italia, 1958, № 3, p. 308—318.
10. Kwapisz M., Turo J. On the existence and uniqueness of solutions of Darboux problem for partial differentialfunctional equations.— Collog. Math., 1974, **29**, p. 279—302.
11. Wong J. S. W. On the convergence of successive approximations in the Darboux problem.— Ann. Polon, math., 1966, **17**, № 3, p. 329—336.

Туркменський
державний університет

Надійшла до редакції 16.XII 1975 р.,
після переробки — 23.V 1977 р.