УДК 517.944.42

*С. М. Самборський*

# Про слабку розв'язність систем нелінійних диференціальних рівнянь в банахових просторах

Робота присв'ячена вивченню умов слабкої розв'язності диференціального рівняння (у координатному запису — системи)

$$Dy(x) = F(x, y(x)), \tag{1}$$

де $y$ — відображення з одного банахового простору в інший. Якщо $F$ — диференційовне відображення, то умови локальної розв'язності рівняння (1) надаються класичною теоремою Фробеніуса. У випадку одновимірного аргументу $x$ і без умов неперервності відображення $F$ рівняння виду (1) вивчаються в теорії еволюційних рівнянь. У цій роботі розглядається випадок аргументу $x$ з банахового простору та одночасно відображення $F$, яке не є неперервним.

Лінійні рівняння (1) з скінченновимірним аргументом $x$ та необмеженим оператором $F$ вивчались, наприклад, в роботах [1, 2].

Оскільки у цій роботі аргумент $x$ належить банаховому простору, то одержані результати крім звичайних застосовувань до систем рівнянь у частинних похідних, можуть бути застосовані для дослідження розв'язності рівнянь у функціональних похідних.

Надалі використовуються такі позначення: $L(E, B)$ — банаховий простір лінійних обмежених операторів, які діють з $E$ в $B$, де $E$, $B$ — банахові простори; $Dy(x)$ $(D_i y(x_1, \ldots, x_n))$ похідна Фреше (частинна похідна по $i$-му аргументу) відображення $y$ банахових просторів; $Id$ — тотожне відображення; $R$ — множина дійсних чисел; $A \cdot a \cdot b$ — дія білінійного оператора $A$ на парі векторів $(a, b)$; $\langle a | b \rangle$ — для функціоналу $b \in B^*$ на вектор $a \in B$.

**1.** Нехай $B$ — банахів простір, $B_+$ — щільний в $B$ лінійний підпростір, який є банаховим в нормі $\|\cdot\|_+$, сильнішій ніж норма в $B$. Позначимо через $I$ оператор вкладення $B_+$ в $B$. Нехай $U$ — множина в банаховому просторі $E$, яка містить $x_0$ та відкрита без $x_0$, а $F: U \times B_+ \to L(E, B)$ — неперервно диференційовне відображення. Досліджувані рівняння мають вигляд:

$$D(Iy(x)) = F(x, y(x)). \tag{2}$$

Означення. Слабким розв'язком рівняння (2) в області $U$ з початковою умовою $y_0 \in B_+$ при $x = x_0 \in U$ назвемо таке відображення $y: U \to B_+$, що $y(x_0) = y_0$ відображення $F(x, y(x))$ слабко неперервне і для будь-яких $x \in U$, $s \in E$, $z \in B^*$

$$D_x \langle Iy(x) | z \rangle s = \langle F(x, y(x)) s | z \rangle.$$

Наведене означення збігається із звичайним означенням слабкого розв'язку еволюційного рівняння, якщо $E = R$ (див. [3]).

**2.** Приклади. Нехай функціонал $\Phi$ діє в просторі $\mathfrak{F}$ функцій від змінної $t$. Припустимо, що $\Phi$ залежить також від параметра $x$ з області $\Omega \subseteq R^n$. Тоді $\Phi$ можна розглядати як відображення з простору $\mathfrak{F}$ в деякій функціональний простір $\mathfrak{F}_1$, який складається з функцій на $\Omega$: $(\Phi(\varphi))(x) = \Phi(\varphi, x)$.

Через $\delta\Phi(\varphi)/\delta\varphi(t)$ позначимо функціональну похідну $\Phi$ по $\varphi$. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\delta\Phi(\varphi, x)/\delta\varphi(t) = L\left(\varphi, t, \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \ldots\right). \tag{3}$$

Оскільки диференціальні оператори обмежено діють з соболевських просторів в $L_p$ або з $C^{k+m}$ в $C^k$, то рівняння (3) можна розглядати як рівняння виду (2).

Нехай тепер відображення $\Phi$ діє з $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$ в $R$. Тоді $\Phi$ визначає при кожному $\varphi\in\mathfrak{F}$ функціонал — елемент банахового простору $B$, який складається з функціоналів на $\mathfrak{F}$. Наприклад, рівняння

$$\delta\Phi(\varphi, \psi)/\delta\varphi(t) = L(t, \delta\Phi(\varphi, \psi)/\delta\psi(t))$$

при переході від ядер (функціональних похідних) до означених ними операторів (похідних Фреше) дає рівняння виду (2) з необмеженою в $B$ правою частиною.

3. Позначимо через $f(t, x, \cdot)$ відображення з $B_+$ в $B$, яке діє за правилом $f(t, x, y) = F(tx, y)\,x$.

Означення. Нехай $t\in[0, 1]$ та $x$, $tx\in U$. Назвемо рівнянням в напрямку $x$ рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(Iy(t, x)) = f(t, x, y(t, x)). \tag{4}$$

Важливість цих рівнянь полягає в тому, що коли існує в $U$ (слабкий) розв'язок $y(x)$ рівняння (2) з початковою умовою $y_0$ при $x=0$, то існують і (слабкі) розв'язки рівнянь (4) для $x\in U$ з початковими умовами $y(0, x) = y_0$ і при цьому $y(x) = y(1, x)$.

Рівняння (4) — еволюційне і, якщо воно і має розв'язок в напрямку $x$, то, взагалі кажучи, це не вірно в інших напрямках (наприклад, в напрямку $-x$). Тому природно шукати розв'язки рівняння (2) в області $U$, для якої початкова точка $x_0$ належить до замикання $U$ (наприклад, у конусі з вершиною $x_0$).

**4.** Надалі припускатимемо, що виконується така умова $A$: Існує лінійний оператор $M\in L(B, B_+)$, який має обмежений обернений, і такий, що відображення $(Id\otimes M)F$ розширюється до диференційовного відображення з $U\times B$ в $L(E, B) = E^*\otimes B$, похідна якого задовольняє умову Ліпшіца.

Зауваження. Для $F$ — диференціальних операторів в шкалах гільбертових просторів ця умова завжди виконується. За $M$ слід взяти оператор, обернений до оператора, який породжує шкалу (або його деякий степінь).

Означення. Відображення $A$, яке діє з $B_+$ в $B$, зветься $m$-дисипативним, якщо для будь-яких $y_1$, $y_2\in B_+$ та $\alpha>0$

$$\| Iy_1 - Iy_2 - \alpha(Ay_1 - Ay_2)\| \geqslant \| Iy_1 - Iy_2\|$$

і відображення $A-\alpha I$ — сюр'єктивне.

Це означення можна записати еквівалентним чином, використовуючи поняття двоїстого відображення $\mathfrak{F}: B\to B^*$ (див. [3]): відображення $A$ дисипативне, якщо для будь-яких $y_1$, $y_2\in B_+$ знайдеться такий вектор $z\in\mathfrak{F}(Iy_1 - Iy_2)$, що $\operatorname{Re}\langle Ay_1 - Ay_2 \mid z\rangle \leqslant 0$.

Теорема. *Нехай $K$ — конус в $E$ (відкритий без нуля). $U$ — окіл нуля в $K$ та непгрервно диференційовне відображення $F: U\times B_+\to L(E, B)$ задовольняє умову $A$ і умову Фробеніуса*:

$$D_1F(x, y)(s_1, s_2) + D_2F(x, y)(F(x, y)s_1, s_2) = D_1F(x, y)(s_2, s_1) +$$
$$+ D_2F(x, y)(F(x, y)s_2, s_1)$$

*на щільній в $B_+$ множині $\{y\}$ при будь-яких $s_1, s_2\in E$.*

*Припустимо, що існують: на $U$ неперервна функція $C_1$ та на $U\times U$ функція $C_2$ такі, що при кожних $x\in U$, $t\in[0, 1]$ відображення $f(t, x, \cdot) = F(tx, \cdot)\,x: B_+\to B$ задовольняють такі умови*:

а) $f(t, x, \cdot) - C_1(x)\,I$ — $m$-дисипативне;

б) $\| D_2f(t, x, (f(t, z, \cdot) - C_1(z)\,I)^{-1}y)\,h\| \leqslant C_2(x, z)\,\|y\|\,\|h\|$

*для будь-яких $z\in U$, $y\in B$, $h\in E$.*

*Припустимо також, що при кожному $x\in U$ рівняння* (4) *має на* $[0, 1]$ *слабкий розв'язок з початковою умовою $y_0\in B_+$.*

*Тоді рівняння $D(Iy(x)) = F(x, y(x))$ має в $U$ єдиний слабкий розв'язок з початковою умовою $y_0$.*

Зауваження 1. У випадку лінійного відображення $F(x, \cdot)$ умова б) та припущення про розв'язність рівнянь (4) випливає з решти припущень теореми.

Зауваження 2. Нехай $F$ не залежить від $x$, тобто $F: B_+ \to L(E, B)$. Позначимо через $F_z$ відображення з $B_+$ в $B$, яке діє за правилом $F_z y = F(y) z$.

Умова б) теореми приймає вигляд: відображення $F_h (F_x - C_1(x) I)^{-1}$ обмежене в $B$ при будь-яких $x, h \in U$.

Якщо простір $B$ має рівномірно випуклий спряжений простір, то існування та єдність розв'язків рівнянь (4) випливає з умови а) теореми.

Доведення. Побудуємо банаховий простір $B_-$ поповнюючи $B$ по нормі $\|z\|_- = \|Mz\|$. Оператор $M^{-1}$ розширюється до обмеженого оператора $M_-^{-1}$ з $B$ в $B_-$. Відображення $f$ розширюється до диференційовного відображення $f_- = M_-^{-1}\overline{Mf}: [0, T] \times U \times B \to B_-$, де $\overline{Mf}$ — розширення $Mf$ на $[0, T] \times U \times B$, яке існує в силу умови $A$. Позначимо через $F_-$ відображення, яке діє з $U \times B$ в $L(E, B_-)$ та є розширенням $F$, а через $J$ — неперервний оператор вкладення $B$ в $B_-$.

З умови Фробеніуса випливає виконання умови

$$JD_1F(x, y)(s_1, s_2) + D_2F_-(x, y)(F(x, y) s_1, s_2) = \\ = JD_1F(x, y)(s_2, s_1) + D_2F_-(x, y)(F(x, y) s_2, s_1), \tag{5}$$

де $y$ — будь-який вектор з $B_+$; $s_1, s_2 \in E$; $x \in U$.

Нехай $y(t, x)$ слабкий розв'язок на $[0,1]$ рівняння (4) з початковою умовою $y_0$. Покажемо спочатку, що відображення $x \to Iy(t, x)$ при будь-якому $t \in [0, 1]$ задовольняє умову Ліпшіца. Розглянемо в банаховому просторі $B \times R$ з нормою $\|(b, \lambda)\|^2_{B\times R} = \|b\|^2 + \lambda^2$ рівняння $z'_t = G(t, z)$, де $G(t, (y, \lambda)) = (f(t, x + \lambda h, I^{-1}y), 0)$. Відображення $z_1(t) = (y(t, x + \lambda h), \lambda)$ та $z_2(t) = (y(t, x), 0)$ — це його слабкі розв'язки з початковими умовами $(y_0, \lambda)$ та $(y_0, 0)$ відповідно.

Оскільки при будь-якому $x \in U$ множина $\{f(t, x, y(t, x)), \quad t \in [0, 1]\}$ обмежена в нормі $B$, то з умови б) теореми випливає існування такої функції $C_3$ на $U \times U$, що при будь-яких $x, h \in U$ і достатньо малих $\lambda \in R$ має місце оцінка

$$\|f(t, x + \lambda h, y(t, x)) - f(t, x, y(t, x))\| \leqslant C_3(x, h)|\lambda|.$$

З цієї оцінки та умови а) теореми випливає нерівність

$$\operatorname{Re}\langle G(t, z_1(t)) - G(t, z_2(t)) \mid g(t)\rangle \leqslant C_4(x, h)\|z_1(t) - z_2(t)\|^2$$

де $g(t) \in \mathfrak{F}(z_1(t) - z_2(t)) \in B^* \times R$ а $C_4$ — функція на $U \times U$.

За допомогою методу, використаного в теоремі 4 роботи [4], з останньої нерівності одержимо, що

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{B\times R} \leqslant \exp(C_4(x, h)t)\|z_1(0) - z_2(0)\|_{B\times R}.$$

При поверненні до норми в $B$ звідси випливає існування такої функції $C_5$ на $U \times U$, що при досить малих $\lambda \in R$

$$\|Iy(t, x + \lambda h) - Iy(t, x)\| \leqslant C_5(x, h)|\lambda|. \tag{6}$$

Покажемо диференційовність відображення $x \to JIy(t, x)$ при будь-якому $t \in [0, 1]$ і розглянемо для цього різницю $\Theta(t, x, h, \lambda) = Iy(t, x + \lambda h) - Iy(t, x)$. За теоремою про середнє

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\Theta) = D_3f_-(t, x, Iy(t, x))\Theta + D_2f_-(t, x, Iy(t, x))\lambda h + \varphi(t, x, \lambda, h) + \\ + \psi(t, x, \Theta, h),$$

де рівність має місце в слабкому розумінні, $\|\varphi\|_- = o(\lambda)$ та $\|\varphi\|_- = o(\|\Theta\|)$.

Оператори $D_3 f(t, x, y(t, x)) - C_1(x) I$ — $m$-дисипативні (завдяки умові а) теореми і теоремі про обернену функцію). Тому для операторів $N(t, x) = D_3 f_-(t, x, Iy(t, x)) - C_1(x) J$, які діють з $B$ в $B_-$, при будь-яких $y \in JB$, $\alpha > 0$ справджується оцінка

$$\|y - \alpha N(t, x) y\|_- \geqslant \|M_- N(t, x)\|_{L(B,B)} \|N^{-1}(t, x) M_-^{-1}\|_{L(B,B)}^{-1} \|Jy\|_-.$$

Оскільки відображення $t \to Iy(t, x)$ задовольняє умову Ліпшіца (як слабкий розв'язок еволюційного рівняння), то

$$\|N(t - s, x) N^{-1}(0, x)\|_{L(B_-, B_-)} \leqslant C_6(x)|t - s|$$

і

$$\|M_- N(t, x)\|_{L(B,B)} \|N^{-1}(t, x) M_-^{-1}\|_{L(B,B)} \leqslant C_7(x).$$

З останньої нерівності та (7) випливає оцінка для норм резольвент операторів $N(t, x) J^{-1}$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$:

$$\|\mathfrak{R}_{N(t,x)J^{-1}}(\lambda)\| \leqslant C_8(x)(1 + |\mathrm{Im}\,\lambda|)^{-1}.$$

Таким чином, виконані всі умови теореми 4.6 з роботи [5, с. 276] (вважаючи зауваження після цієї теореми, див. також [6, теорема 4.6]), і задача Коші для рівняння $W'_t = N(t, x) J^{-1} W$ в трикутнику $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ рівномірно коректна на $JB \subset B_-$. Нехай $U_-(t, \tau, x)$ відповідний еволюційний оператор.

Припустимо, що $\Lambda(t, x, h)$ — розв'язок на $[0, 1]$ рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\Lambda) = D_3 f_-(t, x, Iy(t, x))\Lambda + D_2 f_-(t, x, Iy(t, x)) h$$

з нульовою початковою умовою. Цей розв'язок існує в силу теореми 3.2 з роботи [5, с. 241], оскільки відображення $t \to D_2 f_-(t, x, Iy(t, x)) h = JD_2 f(t, x, y(t, x)) h$ неперервне та приймає значення в $JB$.

Відображення $h \to \Lambda(t, x, h)$ неперервне і

$$\left\|\frac{\Theta}{\lambda} - J\Lambda\right\|_- = \left\|\int_0^t U_-(t, \tau, x) \frac{\varphi(\tau, x, \lambda, h) + \psi(\tau, x, \Theta, h)}{\lambda} d\tau\right\|_- \to 0.$$

Тому $\Lambda(t, x, \cdot)$ — похідна відображення $JIy(t, \cdot)$. В силу (6) величина $\|\lambda^{-1}\Theta\|$ обмежена при $\lambda \to 0$ і для будь-якого $W$ з щільної в $B^*$ множини $\mathrm{Im}\, J^* \langle \lambda^{-1}\Theta | W\rangle \to \langle \Lambda | W\rangle$ при $\lambda \to 0$. З цього випливає, що $\lambda^{-1}\Theta$ слабко збігається до $\Lambda$ при $\lambda \to 0$ та існує слабка похідна по $x$ відображення $Iy(t, x)$.

Використовуючи умову Фробеніуса (5) слабку диференційовність $Iy(t, \cdot)$ та стандартні міркування при доведенні теореми Фробеніуса (див. [7, с. 357]), одержуємо, що відображення $t \to h(t, x, s) = \Lambda(t, x, s) - tF(tx, y(t, x)) s$ слабко задовольняє на $[0, 1]$ еволюційне рівняння $(JW)'_t = D_3 f_-(t, x, Iy(t, x)) W$ з нульовою початковою умовою. В силу доведеної рівномірної коректності задачі Коші для цього рівняння, $h \equiv 0$ та $y(x) = y(1, x)$ — розв'язок рівняння (2). Теорему доведено.

Автор дякує Ю. Л. Далецькому за постановку задачі та керування роботою.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Шихватов А. М. Линейные дифференциальные уравнения на группе Ли.— Функциональный анализ и его приложения, 1970, 4, вып. 1, с. 52—61.
2. Сысоев Ю. С. Линейное неоднородное уравнение на группе Ли.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, вып. 2, с. 364—366.

3. Kato T. Nonlinear equations of evolution.— J. Math. Soc. Japan, 1967, **19**, N **4**, p. 508—520.
4. Хазан М. И. Нелинейные эволюционные уравнения в локально выпуклых пространствах.— ДАН СССР, 1973, **212**, № 6, с. 1309—1312.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. «Наука», 1967. 464 с.
6. Poulsen E. T. Evolutiongleichungen in Banax—Raumen.— Math. Zeitschr., 1965, **90**, p. 286—309.
7. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., «Мир», 1967. 460 с.

Київський
політехнічний інститут

Надійшла до редакції
25.XII. 1975 р.