УДК 517.946

Л. А. Иванов

Поведение решений одного гиперболического нелинейного уравнения при вариации области

1. Пусть $Q = \Omega \times (0, T)$ — цилиндрическая область в R^{n+1}, $\Omega \subset R^n$, В Ω содержится семейство областей Ω_μ, $\mu \in [0, 1]$, достаточно гладко зависящее от параметра [1]. Для некоторой функции f, $f \in L^2(Q)$, рассматривается (при каждом $\mu \in [0, 1]$) уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f_\mu \text{ в } Q_\mu, \tag{1}$$

где $f_\mu = f|_{Q_\mu}$, $Q_\mu = \Omega_\mu \times (0, T)$, $\Delta = \sum_{j=1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, и $u = u(t, x)$, $\rho \leqslant \frac{2}{n-2}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема (см. [2]). *Пусть выполняются начальные условия*

$$u(0) = u_0^{(\mu)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1^{(\mu)}, \tag{2}$$

причем $f \in L^2(Q)$, $u_0^{(\mu)} \in H_0^1(\Omega_\mu) \cap L^p(\Omega_\mu)$, $p = \rho + 2$, $u_1^{(\mu)} \in L^2(Q)$. *Тогда существует единственная функция* $u_\mu(t, x)$, *удовлетворяющая условиям*

$$u_\mu \in L^\infty(0, T; H_0(\Omega_\mu) \cap L \ (\Omega_\mu)), \qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\mu)),$$

а также уравнению (1) *и условиям* (2). *Если* $v_\mu(t, x)$ — *решение уравнения* (1) *с правой частью* $g_\mu = g|_{Q_\mu}$ *и начальными условиями* $v_0^{(\mu)}$, $v_1^{(\mu)}$, *то имеет место оценка*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(u_\mu - v_\mu) \right\|^2_{L^2(\Omega_\mu)} + \| u_\mu - v_\mu \|^2_{H^1(\Omega_\mu)} \leqslant C \{ \| u_1^{(\mu)} - v_1^{(\mu)} \|^2_{L^2(\Omega_\mu)} +$$

$$+ \| u_0^{(\mu)} - v_0^{(\mu)} \|^2_{H^1(\Omega_\mu)} + \int_0^t \| (f_\mu - g_\mu)(\sigma) \|^2_{L^2(\Omega_\mu)} \}, \tag{3}$$

где константа G *ограничена на ограниченных множествах решений.*

Заметим, что уравнение (1) возникает в квантовой механике и исследовалось в многочисленных работах (см. ссылки в [2]).

Нас интересует зависимость от параметра решения $u_\mu(x, t)$, $\mu \in [0, 1]$.

2. Введем некоторые упрощающие (но не ограничивающие общности) предположения. Пусть Ω_0 соответствует значению $\mu = 0$ и часть границы $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ лежит на гиперплоскости $x_n = 0$. Предполагаем, что именно эта часть границы и меняется, т. е. $\Gamma_\mu = \partial\Omega_\mu$ описывается функцией $x_n = \varkappa(\mu, x')$, $\varkappa$ достаточно гладкая и имеет вместе со всеми достаточно большими производными по x' порядок μ, т. е.

$$| D^\alpha \varkappa(\mu; x') | \leqslant C_\alpha \mu. \tag{4}$$

Естественно при этом потребовать, чтобы $\varkappa(\mu, x') = \varkappa(0, x') = 0$, когда $x' \in \partial[\Gamma_0 \cap \{x_n = 0\}]$. Если теперь $u_0(t, x)$ — решение (1) — (2) в Ω_0, то мы можем определить функцию $\bar{u}_\mu(t, x) = S_{\Omega_\mu} R_{\Omega_0} u_0(t, x)$, где R_{Ω_0}—оператор продолжения Хестенса, S_{Ω_μ} — оператор сужения функций на Ω_μ. Нас интересует оценка нормы

$$||| u_\mu(t, x) - \bar{u}_\mu(t, x) |||_{\Omega_\mu}; \tag{5}$$

здесь $||| \ldots |||_{\Omega_\mu}$ определяется равенством

$$||| \varphi |||^2_{\Omega_\mu} = \operatorname*{vraisup}_{t \in (0,T)} \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right\|^2_{L^2(\Omega_\mu)} + \| \varphi \|^2_{H^1(\Omega_\mu)} \right\}. \tag{6}$$

Обозначим через Φ_μ некоторый гомеоморфизм Ω_μ по Ω_0, тогда можно определить функцию $\tilde{u}_\mu(t, x) = u_0(t, \Phi_\mu(x))$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Существует такое семейство гомеоморфизмов* $\Phi_\mu : \Omega_\mu \to \Omega_0$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$, *что*

$$||| \bar{u}_\mu(t, x) - \tilde{u}_\mu(t, x) |||_{\Omega_\mu} \leqslant C_\mu \left(\| u_0 \|_{L^\infty(0,T; H^2(\Omega_0))} + \left\| \frac{\partial u_0}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T; H^1(\Omega_0))} \right). \tag{7}$$

Доказательство состоит в конкретном задании такого гомеоморфизма и проверке (7):

$$\Phi_\mu(x) = \Phi_\mu(x', x_n) = (x', x_n - \varkappa(\mu, x') e^{\frac{4}{3} - \frac{4\varkappa^2}{4\varkappa^2 - x_n^2}}), \ | x_n | \leqslant 2 | \varkappa |; \tag{8}$$

$$\Phi_\mu(x) = x \text{ при остальных } x.$$

Заданный гомеоморфизм является тождественным вне $2|\varkappa|$ полоски гиперплоскости $x_n = 0$. Поэтому носитель разности будет лежать в этой полоске. В силу оценок функций в тонких областях (см. [1, 3]) получаем (7).

Теорема 1. *В случае, когда* $u_0^{(\mu)} = u_1^{(\mu)} = 0$, $f \in H^1(Q)$, *имеет место оценка*

$$||| \tilde{u}_\mu(t, x) - u_\mu(t, x) |||_{\Omega_\mu} \leqslant C\mu \| f \|_{H^1(Q)}. \tag{9}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу теоремы о повышении гладкости (см. [2]) $u_\mu \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega_\mu))$, $\frac{\partial}{\partial t} u_\mu \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_\mu))$. Из оценки (3) получаем

$$|||\widetilde{u}_\mu - u_\mu|||^2_{\Omega_\mu} \leqslant C \int_0^t \|(L\widetilde{u}_\mu - f(\sigma))\|^2_{L^2(\Omega_\mu)} d\sigma. \tag{10}$$

Однако

$$L\widetilde{u}_\mu = \frac{\partial^2 \widetilde{u}_\mu}{\partial t^2} - \Delta \widetilde{u}_\mu + |\widetilde{u}_\mu|^\rho \widetilde{u}_\mu =$$

$$= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(t; \Phi_\mu(x)) - (\Delta u_0)(t, \Phi_\mu(x)) + |u_0(t, \Phi_\mu(x))|^\rho u_0(t, \Phi_\mu(x)) +$$

$$+ (\Delta u_0)(t, \Phi_\mu(x)) - \Delta[u(t, \Phi_\mu(x))] = (Lu_0)(t, \Phi_\mu(x)) +$$

$$+ (\Delta u_0)(t, \Phi_\mu(x)) - \Delta[u(t, \Phi_\mu(x))]. \tag{11}$$

Так как гомеоморфизм Φ_μ задан в явном виде, то последнее слагаемое можно также подсчитать явно ($\varphi_\mu(x', x_n) = x_n - \varkappa^{\frac{4}{3} - \frac{4\varkappa^2}{4\varkappa^2 - x_n^2}}$):

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(t, x', \varphi_\mu(x', x_n)) = \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(t, x', \varphi_\mu) + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(t, x', \varphi_\mu) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j},$$

$$j \neq n, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} u_0(t, x', \varphi_\mu(x', x_n)) = \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(t, x', \varphi_\mu) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_n}.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2}(t, \Phi_\mu(x)) + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n \partial x_j}(t, x', \varphi_\mu) \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n}(t, \Phi_\mu(x)) \times \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j}\right]^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(t, \Phi_\mu(x)) \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_j^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n^2}(t, \Phi_\mu(x)) \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_n}\right]^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_n^2}.$$

Отсюда

$$\Delta[u_0(t, \Phi_\mu(x))] = (\Delta u_0)(t, \Phi_\mu(x)) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_n}(t, \Phi_\mu(x)) \times$$

$$\times \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n^2} \left\{\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j}\right]^2 - 1\right\} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n}(t, \Phi_\mu) \Delta \varphi_\mu.$$

Окончательно из (11) будем иметь

$$L\widetilde{u}_\mu = f_0(t, \Phi_\mu(x)) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_n}(t, \Phi_\mu(x)) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_n^2} \left\{\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j}\right]^2 - 1\right\} + \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \Delta \varphi_\mu.$$

Подставляя полученное выражение в (10), получаем

$$\| \tilde{u}_\mu - u_\mu \|^2_{\Omega_\mu} \leqslant C \left\{ \int_0^t \| (f_0(\sigma, \Phi_\mu(x)) - f_\mu(\sigma, x)) \|^2_{L^2(\Omega_\mu)} d\sigma + \right.$$

$$\left. + 2 \| u_0 \|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega_0))} \left[\max_{x'} \left| \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j} \right|^2 + \max_{x'} \left| \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j} \right]^2 - 1 \right|^2 + \max_{x'} | \Delta \varphi_\mu |^2 \right]^2 \right\}. \tag{12}$$

В силу (4) первые два слагаемые в квадратной скобке оцениваются через C_μ. Рассмотрим второе слагаемое. Производные $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_j}$ оцениваются аналогично. Производная по x_n оценивается так: $\left| \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_n} \right| = 1 + O(\delta^2)$. Таким образом, второе слагаемое в первой части (12) имеет порядок δ^2. Разность $\| f_0(\sigma, \Phi_\mu(x) - f_\mu(\sigma, x)) \|^2_{\Omega_\mu}$ оценивается (подобно лемме 1) при помощи оценок функций в тонких областях через $C_\mu \| f \|_{H^1(\Omega)}$.

Отсюда следует утверждение теоремы.

Замечание. Предположение $u_0^{(\mu)} = u_1^{(\mu)} = 0$ несущественно, можно рассматривать и неоднородные начальные условия. В силу линейности «начальных операторов» (сужение и сужение производной по t) не будет никаких отличий от линейной задачи (см. [3]).

Следствие. *В силу теоремы* 1 *и леммы получаем, что оценка* (9) *имеет место, если заменить* $\tilde{u}_\mu(t, x)$ *на* $\bar{u}_\mu(t, x)$.

Отметим в заключение, что аналогичным методом (с помощью гомеоморфизма) можно исследовать и другие нелинейные задачи в том случае, когда нелинейность не содержит дифференцирований.

Автор выражает благодарность С. Г. Крейну за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Поведение решений эллиптических задач при вариации области. — Studia Mathematica, 1968, **31**, с. 411—428.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972. 587 с.
3. Иванов Л. А. К разрешимости эллиптических задач в предельных областях. — УМЖ, 1973, **25**, № 1, с. 99—103.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
12.V. 1976 г.