УДК 517.93

Д. Г. Мажирос

Нелинейные дифференциальные уравнения с несколькими общими решениями

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь несколько общих решений. Их существование и определение может быть рассмотрено путем «ограничения решений» дифференциального уравнения или путем «факторизации дифференциального уравнения».

1. Введение. Общие решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений — наиболее желательные решения, особенно для приложений, однако только для некоторых классов уравнений можно найти их в замкнутом виде.

В то время как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет одно общее решение, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение может иметь одно или несколько общих решений.

В этой статье рассматриваются классы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие несколько общих решений. Для этого класса уравнений можно получить хорошие результаты либо путем ограничения величин дифференциального уравнения, либо путем его факторизации.

Уточним некоторые понятия, связанные с понятием общих решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (F), справедливое в области (R) пространства своих переменных, и рассмотрим функцию Φ, зависящую от переменных дифференциального уравнения (F), содержащую ряд произвольных постоянных и принимающую значения в области (C)

пространства этих постоянных. Функция, возникающая из (Φ) при определении всех ее произвольных постоянных, и такая, что удовлетворяет (F), является частным решением уравнения (F).

Функция (Φ), рассматриваемая как совокупность всех частных решений уравнения (F), возникающих из (Φ), является общим решением этого уравнения (F).

Любая функция, возникающая из общего решения (Φ) нелинейного дифференциального уравнения (F) при определении некоторых произвольных постоянных в (Φ), которая содержит оставшиеся неопределенными постоянные в качестве произвольных параметров, является «частью» общего решения уравнения (F).

Если имеются функции (Φ_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, обладающие свойствами, аналогичными свойствам (Φ) относительно (F), и, кроме того, частные решения любых двух функций (Φ_i) не тождественны, то их следует рассматривать как «разные общие решения» дифференциального уравнения (F); тогда говорим, что (F) имеет «несколько общих решений». Другими словами, рассматривая (Φ_i) как множество решений дифференциального уравнения (F) таких, что ни одна из любых двух функций (Φ_i) не включает другую, но они могут иметь пересечение, мы считаем их разными общими решениями нелинейного дифференциального уравнения (F).

2. Метод ограничения величин дифференциального уравнения. Ограничение решений или других величин дифференциального уравнения может дать несколько общих решений дифференциального уравнения. Приведем примеры.

Пример 1.

$$y'y''' - y''^2 = 0. \tag{1}$$

Ограничим решение y и получим 3 случая:

а) если y ограничено посредством $y' = 0$, откуда следует $y'' = 0$, тогда (1) удовлетворяется посредством $y' = 0$, $y'' = 0$, так что $y = c$ удовлетворяет (1); c — произвольная постоянная;

б) если y ограничено посредством $y'' = 0$, откуда следует $y''' = 0$, тогда (1) удовлетворяется посредством $y'' = 0$, $y''' = 0$, так что

$$y = a_1 x + a_2, \tag{2}$$

с произвольными постоянными a_1, a_2, является общим решением уравнения (1);

в) если y ограничено посредством $y' \neq 0$ и $y'' \neq 0$, дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'},$$

откуда посредством интегрирования можно получить

$$\frac{y''}{y'} = c_1, \tag{3}$$

c_1 — произвольная постоянная. Интегрирование (3) дает

$$y' = c_2 e^{c_1 x}, \tag{4}$$

c_2 — вторая произвольная постоянная. Интегрирование (4) дает

$$y = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 x} + c_3, \tag{5}$$

которое содержит три произвольных постоянных.

Функции (2) и (5) — два различных общих решения дифференциального уравнения (1), содержащие прямые линии, параллельные оси x-ов, как общую часть.

Пример 2.

$$y'''(1+y'^2)-2y'y''=0. \tag{6}$$

Ограничим решение y двумя способами:

а) если y ограничить посредством $y''=0$, откуда следует $y'''=0$, тогда дифференциальное уравнение (6) будет одновременно удовлетворяться посредством $y''=0$, $y'''=0$, и функция

$$y=a_1x+a_2 \tag{7}$$

будет являться общим решением уравнения (6);

б) если y ограничивается посредством $y''\neq 0$, тогда (6) может быть точно проинтегрировано [1], и функция

$$x^2+y^2+c_1x+c_2y+c_3=0, \tag{8}$$

т. е. семейство окружностей в плоскости (x, y) будет общим решением уравнения (6).

Так как определение произвольной постоянной (7) и (8), которое отождествляет частное решение (7) с частным решением (8) не осуществлено, то в таком случае функции (7) и (8) являются различными общими решениями уравнения (6).

Пример 3.

$$y''+\frac{2}{x}y'+y^n=0. \tag{9}$$

В этом примере ограничим скаляр n. Это уравнение хорошо известно в астродинамике как дифференциальное уравнение «Емдена» [2]. Его решение в замкнутом виде известно в случаях $n=0$, $n=1$, когда (9) линейно; в случае $n=5$, функция, содержащая произвольную постоянную, удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, и рассматривается как «часть» «неизвестного» общего решения. Ни в каких других случаях скаляра n дифференциальное уравнение (9) не имеет общего решения.

Хотя общие решения и наиболее желательны, но встречаются случаи, когда они не в состоянии отразить всей сути рассматриваемых физических явлений и любая попытка найти общие решения должна побуждаться только теоретическим любопытством. Емденовское дифференциальное уравнение и является таким примером.

В своих исследованиях Емден нашел, что решения уравнения (9) имеют физический смысл в случае, когда n находится между 0 и 5. Он также нашел, что в физических ситуациях исследуются граничные условия: $x=0$, $y=1$, $y'=0$, и при этих условиях частные решения уравнения (9), известные в случаях $n=0, 1, 5$, не приемлемы. Емден и его последователи нашли решение, удовлетворяющее физическим требованиям, и этим решением было разложение Тейлора относительно $x=0$ с последующим применением аналитического продолжения ряда.

Заметим, что, используя ограничения величин дифференциального уравнения, можно получить несколько общих решений нелинейного дифференциального уравнения, отличных от приведенных примеров.

3. Метод факторизации дифференциального уравнения. Факторизация дифференциального уравнения может привести к нескольким общим решениям дифференциального уравнения. Проиллюстрируем этот метод на нескольких примерах.

Пример 4.

$$x^3y''y'''+x^2y''^2-2xy'y''+2yy''=0, \tag{10}$$

y'' — общий множитель всех членов уравнения (10), так что либо

а) $y''=0$, либо б) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$, откуда имеем

$$\text{а) } y = a_1 x + a_2; \quad \text{б) } y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1}. \tag{11}$$

Функции (11)— два общих решения уравнения (10). Видим, что семейство прямых линий, проходящих через начало координат,— общая часть этих общих решений.

Пример 5. $F(x, y, y') = 0$, когда это выражение есть полином по y' степени m.

В этом случае имеем

$$F(x, y, y') \equiv y'^m + P_1(x, y)\, y'^{m-1} + \ldots + P_{m-1}(x, y)\, y' + P_m(x, y) = 0. \tag{12}$$

Мы можем решить (12) относительно y', если $F_{y'}(x, y, y') \neq 0$; если $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ являются m простыми корнями, то можно записать

$$F(x, y, y') \equiv [y'_1 - P_1(x, y)]\,[y'_2 - P_2(x, y)] \ldots [y'_m - P_m(x, y)] = 0. \tag{13}$$

Приравнивая к нулю каждый множитель, из соответствующих дифференциальных уравнений получаем m функций:

$$\varphi_1(x, y, c_1) = 0, \ \varphi_2(x, y, c_2) = 0, \ \ldots, \ \varphi_m(x, y, c_m) = 0, \tag{14}$$

являющихся m разными общими решениями выражения (12). Из них выбирают такие, которые являются действительными функциями от действительных переменных. Например, в дифференциальном уравнении

$$y'^2 y''' + y^2 y''' + y''' = 0 \tag{15}$$

факторизация дает: $y''' (y'^2 + y^2 + 1) = 0$ и, так как $y'^2 + y^2 + 1 \neq 0$, это дифференциальное уравнение (15) эквивалентно $y''' = 0$, так что функция

$$y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \tag{16}$$

является общим решением дифференциального уравнения (15). Это общее решение состоит из двух частей разного характера — семейства «парабол» ($c_1 \neq 0$) и семейства «прямых линий» ($c_1 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis H. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publications Inc., New York, 1962, p. 371—377.
2. Goursat E. Differential Equations. Ginn and Company, Boston, 1917, pg. 5.

США

Поступила в редакцию
19.V. 1977 г.