УДК 519.41/.47

Л. С. Можаровская

Некоторые свойства конечных сверхразрешимых групп

Подгруппа A группы G называется c-дополняемой в G, если существует такая подгруппа $B \subset G$, что $A \cdot B = G$ и $A \cap B$ — циклическая группа.

Группы, в которых все их подгруппы c-дополняемы, будем называть DC-группами.

В данной работе устанавливаются некоторые характеристические свойства конечных нильпотентных (в частности, примарных) DC-групп и вводятся в рассмотрение произвольные конечные сверхразрешимые группы, обладающие аналогичными свойствами.

1. Лемма 1. *Подгруппа Фраттини конечной DC-группы является циклической группой.*

Лемма 2. *Расширение циклической группы при помощи вполне факторизуемой группы является DC-группой.*

С помощью лемм 1 и 2 получаем следующее характеристическое свойство конечных нильпотентных DC-групп.

Теорема 1. *Конечными нильпотентными DC-группами исчерпываются все конечные нильпотентные группы с циклической подгруппой Фраттини.*

При переходе от конечных нильпотентных DC-групп к конечным сверхразрешимым DC-группам эта теорема теряет силу.

Пример. Пусть $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $a^{25} = b^8 = 1$, $b^{-1}ab = a^7$. Очевидно, что группа G — сверхразрешима и что ее подгруппа Фраттини совпадает с циклической группой $\langle a^5 \rangle \times \langle b^4 \rangle$. Однако группа G не является DC-группой. В самом деле, нетрудно убедиться, что ее подгруппа $A = \langle a^5 \rangle \rtimes \langle b^2 \rangle$ не имеет в группе G c-дополнения.

Для конечных сверхразрешимых групп с циклической подгруппой Фраттини получены следующие результаты.

Теорема 2. *Конечная сверхразрешимая группа G тогда и только тогда имеет циклическую подгруппу Фраттини, когда она содержит такую инвариантную циклическую подгруппу N, что фактор-группа G/N представима в виде полупрямого произведения*

$$G/N = A/N \rtimes B/N$$

двух абелевых подгрупп A/N и B/N, из которых первая разложима в прямое произведение инвариантных в G/N циклических групп простых порядков и совпадает со своим централизатором в подгруппе B/N.

Предложение 1. *Конечные сверхразрешимые группы с тривиальной подгруппой Фраттини исчерпываются конечными сверхразрешимыми группами с дополняемыми абелевыми нормальными делителями.*

Примечание. Достаточность в этом предложении вытекает из результатов работы [1].

2. В статье [2] изучались периодические группы, в которых дополняемы все циклические подгруппы простых порядков (примитивно факторизуемые группы). Там же показано, что в случае конечных групп класс примитивно факторизуемых групп совпадает с классом вполне факторизуемых групп. В связи с этим представляет некоторый интерес следующее предложение.

Предложение 2. *Конечные нильпотентные DC-группы и только они являются конечными нильпотентными группами, в которых дополняемы все циклические подгруппы простых порядков, кроме быть может одной для каждого простого числа p, делящего порядок группы.*

При переходе от конечных нильпотентных к конечным сверхразрешимым *DC*-группам это предложение теряет силу (см. приведенный выше пример). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *В конечной сверхразрешимой группе тогда и только тогда дополняемы все циклические подгруппы простых порядков, кроме быть может одной для каждого простого числа p, делящего порядок группы, когда ее силовские подгруппы являются DC-группами, а недополняемые подгруппы простых порядков инвариантны в группе G.*

Описание конечных сверхразрешимых групп, силовские подгруппы которых являются *DC*-группами, дает следующая теорема.

Теорема 4. *В конечной непримарной сверхразрешимой группе G тогда и только тогда все силовские подгруппы являются DC-группами, когда она имеет такой циклический нормальный делитель N, что фактор-группа G/N представима в виде полупрямого произведения* $G/N = A/N \rtimes B/N$ *двух абелевых подгрупп A/N и B/N, удовлетворяющих следующим требованиям:*

1) *подгруппа A/N разлагается в прямое произведение инвариантных в G/N циклических подгрупп простых порядков либо является единичной группой;*

2) *подгруппа B/N либо вполне факторизуема, либо разлагается в прямое произведение*

$$B/N = K/N \times H/N,$$

где множитель K/N является вполне факторизуемой группой, множитель H/N — циклической группой, все силовские подгруппы которой имеют непростые порядки, а силовские подгруппы его полного прообраза H в группе G являются циклическими группами.

В связи с теоремой 4 отметим, что среди рассматриваемых в ней сверхразрешимых групп содержатся *PC*-плотные конечные группы, изучавшиеся в работе [3].

В заключение выражаю глубокую благодарность С. Н. Черникову за поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников С. Н. Сверхразрешимые группы с дополняемыми абелевыми нормальными делителями.— В кн.: Группы с системами дополняемых подгрупп. К., Ин-т математики АН УССР, 1972, с. 35—48.
2. Горчаков Ю. М. Примитивно факторизуемые группы.— Уч. зап. Пермск. ун-та, 1960, **17**, вып. 2, с. 15—31.
3. Черников С. Н. Группы с примитивно-плотной системой дополняемых подгрупп.— В кн.: Исследования по теории групп. К., Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 3—25.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
25.X. 1977 г.