УДК 517.944

В. Б. Мосеенков

Квазипериодические решения слабо диссипативного нелинейного волнового уравнения

Приводятся результаты исследования вопросов существования, регулярности и устойчивости квазипериодических по времени t решений уравнения

$$\mathfrak{L}u = u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon\alpha u_t + \varepsilon F(t, x, u, \varepsilon) = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$, где функция $F(t, x, u, \varepsilon)$ квазипериодична по t с частотным базисом $\omega = (1, \omega_1, \ldots, \omega_m)$, r раз непрерывно дифференцируема, удовлетворяет некоторым требованиям роста по u, $F(t, x, u, 0)$ 2π-периодична по t, ε — малый параметр, $\alpha \neq 0$.

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = \Box u = 0,$$

имеющее бесконечно много 2π-периодических решений, удовлетворяющих краевым условиям. Таким образом, искомое решение может порождаться любой функцией из нуль-пространства $\mathrm{Ker}\,\Box$ волнового оператора $\Box$, т. е. возникает проблема неоднозначности. Однако, как и в случае задачи (1) с 2π-периодическим по t нелинейным членом вида $\varepsilon F(t, x, u)$, исследованной в

[1], удается найти единственное $v \in \operatorname{Ker} \Box$, порождающее решение возмущенного уравнения.

Пусть $H_{r,l}$ — пополнение пространства тригонометрических полиномов вида

$$\varphi(t, x) = \sum_{j,k} \varphi_{jk} \sin jx e^{i(k,\omega)t}, \ j = \pm 1, \pm 2, \dots; \ k = (k_1, \dots, k_{m+1}),$$

$$k_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, s = \overline{1, m+1},$$

по норме

$$\|\varphi\|_{r,l}^2 = \sum_{|\sigma| \leqslant l} c_\sigma ((1 - T_1^2 - \dots - T_{m+2}^2)^r D^\sigma \varphi, \ D^\sigma \varphi) =$$

$$= \sum_{j,k} (1 + j^2 + |k|^2)^r (1 + j^2 + |(k, \omega)|^2)^b |\varphi_{jk}|^2,$$

где

$$D^\sigma = \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial t^{\sigma_1} \partial x^{\sigma_2}}, \ |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2, \ |k|^2 = k_1^2 + \dots + k_{m+1}^2,$$

$$T_{m+2} = \frac{\partial}{\partial x}, \ (T_s u)_{jk} = i k_s u_{jk}, \qquad s = \overline{1, m+1},$$

$$(u, v) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{2}{\pi T} \int_0^T \int_0^\pi uv dx dt.$$

Это гильбертово пространство со скалярным произведением, связанным с нормой $\|u\|_{r,l}$.

Через C^l обозначим пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой $|u|_l = \sum_{|\sigma| \leqslant l} \sup_{t,x} |D^\sigma u|$.

Решение задачи (1) разыскивается в виде $u = v(t, x) + \varepsilon w(t, x, \varepsilon)$, где $v \in \operatorname{Ker} \Box$, w — ограниченная функция ε.

Если уравнение (1) имеет решение $u(t, x, \varepsilon)$ такое, для которого $v(t, x) = u(t, x, 0) \in \operatorname{Ker} \Box$, то для всякого $\varphi \in \operatorname{Ker} \Box$

$$0 = (\mathfrak{L} u, \varphi) = \varepsilon (\alpha u_t + F(t, x, u, \varepsilon), \varphi),$$

откуда, сокращая на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$(\alpha v_t + F(t, x, v, 0), \varphi) = 0, \ \varphi \in N_0, \tag{2}$$

где N_0 — замыкание $\operatorname{Ker} \Box$ в H_0.

Воспользовавшись тем, что любая функция $v \in \operatorname{Ker} \Box$ имеет вид $v(t, x) = p(t + x) - p(t - x)$, $p(\tau) = p(\tau + 2\pi)$, $p(\tau) \in C^2(R^1)$, бифуркационное уравнение (2) можно свести к интегральному уравнению второго рода:

$$p(\tau) = -\frac{1}{2\pi\alpha} \int_0^\tau \int_0^\pi [F(\tau - x, x, p(\tau) - p(\tau - 2x), 0) -$$

$$- F(\tau + x, x, p(\tau + 2x) - p(\tau), 0)] \, dx d\tau. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$S = \{p(\tau) \in C^0(R^1) \mid p(\tau + 2\pi) = p(\tau), \ p(0) = 0\}, \quad S_k = S \cap \{|p|_0 \leqslant K\},$$

$$M(K)=\sup_{t,x;|s|\leqslant K}|F(t,x,s,0)|,\ N(K)=\sup_{t,x;|s|\leqslant K}|F_u(t,x,s,0)|,$$

$$N_1=\Big\{u\in H_{0,0}\,|\,u=\sum_{j\neq|k|}u_{jk}\sin jxe^{ikt}\Big\},\quad N_2=H_{0,0}\diagdown(N_0\cup N_1).$$

Теорема 1. *Если $F\in C^r(R^{m+1}\times[0,\pi]\times R^1\times[0,\varepsilon_1])$ и найдется $K>0$ такое, для которого $M(2K)\leqslant(2\pi)^{-1}\alpha K$, то бифуркационное уравнение (2) имеет решение $v\in C^{r+1}$ вида*

$$v(t,x)=p(t+x)-p(t-x),\quad p(\tau)\in S_K.$$

Более того, если $N(2K)<(4\pi)^{-1}\alpha$, то $p(\tau)$ является единственным в S_k.

Замечание. Решение v уравнения (2) будет единственным, если условие $N(2K)<(4\pi)^{-1}\alpha$ заменить условием $F_u(t,x,u,0)\geqslant\beta>0$.

Для нахождения $w(t,x,\varepsilon)$ построим итерационный процесс по следующей схеме ($w_0\equiv0$):

$$Lw_{n+1}=(w_{n+1})_{tt}-(w_{n+1})_{xx}+\varepsilon\alpha(w_{n+1})_t+\varepsilon F_u(t,x,v,\varepsilon)w_{n+1}=$$
$$=-\alpha v_t-F(t,x,v+\varepsilon w_n,\varepsilon)+\varepsilon F_u(t,x,v,\varepsilon)w_n,$$
$$w_{n+1}(t,0,\varepsilon)=w_{n+1}(t,\pi,\varepsilon)=0. \tag{4}$$

Существование и единственность каждого решения w_n обеспечивает следующая теорема.

Теорема 2. *Если $F_u\in C^r(R^{m+1}\times[0,\pi]\times R^1\times[0,\varepsilon_1])$, $r>\frac{m}{2}+1$, имеют место условия теоремы 1 и*

$$\varepsilon\alpha<\frac{1}{4},\ g\in H_r,\ C_r\|F_u(t,x,v,\varepsilon)\|_r\leqslant\alpha, \tag{5}$$

то уравнение $Lw=g$ имеет единственное решение $w\in H_{r,1}$ такое, для которого

$$\|w\|_{r,1}\leqslant c[\|g\|_r+(\varepsilon\alpha)^{-1}\|(P_0+P_2)g\|_r], \tag{6}$$

где c_r — константа, монотонно зависящая от r, а P_0 и P_2 — проекторы на N_0 и N_2.

Используя оценку (6), можно доказать сходимость итерационного процесса (4) в пространстве $H_{\rho,1}$, $\rho<r$. Тогда, переходя в (4) к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$w_{tt}-w_{xx}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}(v+\varepsilon w)+F(t,x,v+\varepsilon w,\varepsilon)=0.$$

Умножая левую часть последнего равенства на ε и прибавляя к ней $\square v$, получаем (1). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если $F_\varepsilon\in C^r(R^{m+1}\times[0,\pi]\times R^1\times[0,\varepsilon_1])$ и выполняются условия теорем 1, 2, то при достаточно малом ε задача (1) имеет квазипериодическое по времени t решение вида $u=v(t,x)+\varepsilon w(t,x,\varepsilon)$, где $v\in N_0\cap C^{r+1}$, $w\in H_{\rho,1}$, $\rho<r$.*

Если $r>\frac{m}{2}+2$, то, согласно теореме Соболева, решение будет классическим.

Единственность полученного решения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. *Квазипериодическое решение $u=v+\varepsilon w$ уравнения (1) при $\alpha>0$ является асимптотически устойчивым в том смысле, что вся-*

кое другое решение $u_1 \in \{|u_1 - u|_0 \leqslant B\}$ *при* $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0(B)$ *удовлетворяет условию*

$$|u_1 - u|_1 \leqslant Ae^{-\gamma t},$$

где γ — *константа, зависящая от* ε_0, α, F.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству соответствующей теоремы в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P. H. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations.— Comm. Pure Apl. Math., 1967, **20**, N 1, p. 145—205.
2. Мосеенков В. Б. Квазипериодические решения волнового уравнения с затуханием.— УМЖ, 1977, **29**, № 4, с. 537—540.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.XII. 1977 г.