УДК 519.21

Д. В. Гусак, С. И. Пересыпкина

О времени пребывания над уровнем одного класса управляемых случайных процессов

1. Пусть $\xi_k(t)$ — однородные случайные процессы с независимыми приращениями и характеристическими функциями

$$Me^{i\alpha\xi_k(t)} = e^{t\psi_k(\alpha)},\ \psi_k(\alpha) = i\alpha a_k + \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\, dL_k(x),\ k = \overline{1, n},\ a_k \neq 0. \tag{1}$$

Переход из состояния k в состояние r управляется однородной цепью Маркова $\eta(t)$ с матрицей перехода

$$P(t) = \| p_{kr}(t) \| = e^{tQ}, \quad Q = N(P - I),$$

где $N = \| \delta_{kr} q_r \|$, q_r — параметры показательно распределенного времени пребывания цепи $\eta(t)$ в состоянии r, $P = \| p_{kr} \|$ — матрица перехода вложенной цепи $\{z_n\}$, I—единичная матрица $n \times n$, δ_{kr}—символ Кронекера.

Рассмотрим однородный процесс $\xi(t)$ с независимыми приращениями, управляемый цепью Маркова $\eta(t)$. Его характеристическая функция имеет матричную структуру

$$Me^{i\alpha\xi(t)} = \| M(e^{i\alpha\xi(t)},\ \eta(t) = r / \eta(0) = k) \| = e^{t\Psi(\alpha)}, \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha) = \| \psi_k(\alpha)\, \delta_{kr} \| + N(\Phi(\alpha) - I),$$

а матрица $\Phi(\alpha)$ характеризует случайные скачки χ_{kr} процесса $\xi(t)$ в моменты перехода управляющей цепи из состояния k в состояние r $(k, r=\overline{1,n})$:

$$\Phi(\alpha) = \| M(e^{i\alpha\chi_{kr}}, \ z_1 = k/z_0 = r)\| = \| p_{kr}\varphi_{kr}(\alpha)\|.$$

Рассмотрим граничный функционал $Q(t, x)$ — время пребывания управляемого процесса над уровнем $x \in (-\infty, \infty)$ за интервал времени $[0; t]$:

$$Q(t, x) = \lambda\{u : \xi(u) > x, \quad 0 \leqslant u \leqslant t\},$$

λ — мера Лебега на прямой, а $Q(t, 0) = Q(t)$ — время пребывания процесса над нулевым уровнем. Обозначим

$$D(t, \mu, x) = \| D_{kr}(t, \mu, x)\| = \| M(e^{-\mu Q(t,x)}, \ \eta(t) = r/\eta(0) = k)\|,$$

$$\mu > 0, \ t \geqslant 0, \ -\infty < x < \infty,$$

$$D_{kr}^{+}(t, \mu, x) = D_{kr}(t, \mu, x)\,[\delta(a_k > 0, \ x > 0) + \delta(a_k < 0, \ x \geqslant 0)],$$

$$D_{kr}^{-}(t, \mu, x) = D_{kr}(t, \mu, x)\,[\delta(a_k > 0, \ x \leqslant 0) + \delta(a_k < 0, \ x < 0)],$$

$\delta(A)$ — индикаторная функция множества A.

Тогда с точностью до $o(h)$ можно записать

$$D_{kr}(t, \mu, x) = e^{-(\lambda_k + q_k)h}\,[e^{-\mu h} D_{kr}^{-}(t, \mu, x - a_k h) + D_{kr}^{+}(t, \mu, x - a_k h)] +$$
$$+ \lambda_k h \int_{-\infty}^{\infty} D_{kr}(t, \mu, x - v)\, dL_k(v) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} p_{ki} q_k h \int_{-\infty}^{\infty} D_{ir}(t, \mu, x - v)\, dF_{ki}(v) + o(h). \tag{3}$$

Разделив обе части равенства (3) на h и устремив h к нулю, получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для производящей функции $D(t, \mu, x)$:

$$\frac{\partial D_{kr}(t, \mu, x)}{\partial t} = -a_k \frac{\partial D_{kr}(t, \mu, x)}{\partial x} - (\lambda_k + q_k) D_{kr}(t, \mu, x) - \mu D_{kr}^{-}(t, \mu, x) +$$
$$+ \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} D_{kr}(t, \mu, x - v)\, dL_k(v) + \sum_{i=1}^{n} p_{ki} q_k \int_{-\infty}^{\infty} D_{ir}(t, \mu, x - v)\, dF_{ki}(v). \tag{4}$$

2. Пусть $\mathfrak{B}_n(\alpha)$ $(\operatorname{Im}\alpha = 0)$ — банахова алгебра квадратных матриц порядка n, элементы которых являются преобразованиями Фурье—Стильтьеса от непрерывных справа функций $F(x)$, имеющих на любом конечном интервале ограниченную вариацию, и таких, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,|dF(x)|$ абсолютно сходится. Если некоторая матрица-функция $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{B}_n(\alpha)$, то $\varphi(\alpha) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right\|$.

Введем две операции проектирования $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{B}_n(\alpha) = \mathfrak{B}_n^{-}(\alpha), \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{B}_n(\alpha) = \mathfrak{B}_n^{+}(\alpha),$$

$$\mathfrak{B}_n^{\pm}(\alpha) = \left\{ \varphi^{\pm}(\alpha) : \varphi^{\pm}(\alpha) = \left\| \pm \int_{0}^{\pm\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right\| \right\}.$$

Подалгебры $\mathfrak{B}_n^+(\alpha)$ и $\mathfrak{B}_n^-(\alpha)$ имеют нетривиальное пересечение, их прямая сумма не дает $\mathfrak{B}_n(\alpha)$. Любую функцию $\varphi(\alpha)\in\mathfrak{B}_n(\alpha)$ можно представить в виде суммы $\varphi(\alpha)=\varphi^+(\alpha)+\varphi^-(\alpha)$, где $\varphi^\pm(\alpha)\in\mathfrak{B}_n^\pm(\alpha)$. Произвольный элемент подалгебры $\mathfrak{B}_n^\pm(\alpha)$ можно представить в виде $\varphi^\pm(\alpha)=c_\pm+$ $+g_\pm(\alpha)$, где $g_\pm(\alpha)=\left\|\pm\int\limits_{\pm 0}^{\pm\infty}e^{i\alpha x}dF_{kr}(x)\right\|$, $c_\pm$ — постоянные относительно α матрицы и определяются скачками в нуле функций $F_{kr}(x)$.

Обозначим

$$d_{kr}^\pm(t,\mu,\alpha)=\pm\int\limits_0^{\pm\infty}e^{i\alpha x}dD_{kr}^\pm(t,\mu,x),\quad d^\pm(t,\mu,\alpha)=\|d_{kr}^+(t,\mu,\alpha)\|\in\mathfrak{B}_n^\pm(\alpha).$$

Следует отметить, что в матричной записи

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}dMe^{-\mu Q(t,x)}\equiv d(t,\mu,\alpha)=d^+(t,\mu,a)+d^-(t,\mu,\alpha),$$

но для тех строк, которые соответствуют номерам $\{k:a_k>0\}$, точка $x=0$ принадлежит $d^-(t,\mu,\alpha)$, а для строк, соответствующих номерам $\{k:a_k<0\}$, точка $x=0$ принадлежит $d^+(t,\mu,\alpha)$.

Введем вспомогательную матрицу $\Delta=\|\delta_{kr}\delta(a_k<0)\|$. Тогда $I-\Delta=$ $=\|\delta_{kr}\delta(a_k>0)\|$, поскольку процессы не имеют нулевых сносов, и обозначим

$$d_\pm(t,\mu,\alpha)=\left\|\pm\int\limits_{\pm 0}^{\pm\infty}e^{i\alpha x}dD_{kr}(t,\mu,x)\right\|,\quad d_\pm(t,\mu,\alpha)\in\mathfrak{B}_n^\pm(\alpha).$$

Тогда матрицу $d(t,\mu,\alpha)$ можно представить следующим образом:

$$d(t,\mu,\alpha)=d_-(t,\mu,\alpha)+Me^{-\mu Q(t,0)}+d_+(t,\mu,\alpha)=$$
$$=d_-(t,\mu,\alpha)+(I-\Delta)Me^{-\mu Q(t)}+\Delta Me^{-\mu Q(t)}+d_+(t,\mu,\alpha),$$

причем

$$d^-(t,\mu,\alpha)=(I-\Delta)Me^{-\mu Q(t)}+d_-(t,\mu,\alpha),$$
$$d^+(t,\mu,\alpha)=\Delta Me^{-\mu Q(t)}+d_+(t,\mu,\alpha).$$

Кроме того, из этого представления легко определить проекции $d^\mp(t,\mu,\alpha)$ на $\mathfrak{B}_n^\pm(\alpha)$

$$\mathfrak{P}d^+(t,\mu,\alpha)=\Delta Me^{-\mu Q(t)},\quad \mathfrak{Q}d^-(t,\mu,\alpha)=(I-\Delta)Me^{-\mu Q(t)}.$$

Применив к уравнению (4) преобразование Лапласа по t и Фурье — Стильтьеса по x, можно записать его в виде

$$\left[I-\frac{\mu}{s+\mu}Me^{i\alpha\xi(\theta_{s+\mu})}\right]d^+(\theta_s,\mu,\alpha)+d^-(\theta_s,\mu,\alpha)=0 \tag{5}$$

(θ_s—показательно распределенная с параметром $s>0$ случайная величина).

3. Для определения искомой производящей функции требуется факторизационное разложение матрицы $I-\frac{\mu}{s+\mu}Me^{i\alpha\xi(\theta_{s+\mu})}$. Подобно тому, как это было сделано в работе [1], воспользуемся методом [2]. Пусть ζ_m — сумма m независимых одинаково распределенных случайных величин $\theta_{s+\mu}$ с распределением $P\{\theta_{s+\mu}>t\}=e^{-(s+\mu)t}$. Цепи Маркова $\eta(t)$ поставим в соответствие цепь $\tilde{\eta}_j=\eta(\zeta_j)$ с переходной матрицей $[P(\theta_{s+\mu})]^j$. Заметим, что у цепи Маркова $\tilde{\eta}_j$ не исключены переходы из состояния k в состоя-

ние k. Процессу $\xi(t)$, заданному на цепи $\eta(t)$, будет соответствовать случайная последовательность $\widetilde{S}_m$ с независимыми приращениями, управляемая цепью Маркова $\widetilde{\eta}_m$: $\widetilde{S}_m = \sum_{j=1}^{m} \xi(\zeta_j)$.

Поскольку $\frac{\mu}{s+\mu} > 0$, то для $\operatorname{Im}\alpha = 0$ обозначим

$$C(s, \mu, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^j C_j(s, \mu, \alpha) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^j \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} dP \{\max_{0<m<j} \widetilde{S}_m \leqslant 0,\ \widetilde{S}_j < y,\ \widetilde{\eta}_j = r/\widetilde{\eta}_0 = k\} \right\|,$$

$$B(s, \mu, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^j B_j(s, \mu, \alpha) =$$

$$= \sum_{j+1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^j \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} dP \{\max_{0<m<j} \widetilde{S}_m \leqslant \widetilde{S}_j < y,\ \widetilde{\eta}_j = r/\widetilde{\eta}_0 = k\} \right\|.$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Для интегрального преобразования характеристической функции* (2) *рассматриваемого процесса справедливо следующее факторизационное тождество:*

$$I - \frac{\mu}{s+\mu} Me^{i\alpha\xi(\theta_{s+\mu})} = [I - B_-(s, \mu, \alpha)]\,[I - C_+(s, \mu, \alpha)], \qquad (6)$$

причем

$$[I - B_-(s, \mu, \alpha)]^{-1} = 1 + C_-(s, \mu, \alpha), \quad [I - C_+(s, \mu, \alpha)]^{-1} = I + B_+(s, \mu, \alpha).$$

Применяя факторизационную формулу (6) к уравнению (5), имеем

$$[I - C_+(s, \mu, \alpha)]\,[d_+(\theta_s, \mu, \alpha) + \Delta M e^{-\mu Q(\theta_s)}] +$$

$$+ [I + C_-(s, \mu, \alpha)]\,[d_-(\theta_s, \mu, \alpha) + (I - \Delta)\, M e^{-\mu Q(\theta_s)}] = 0. \qquad (7)$$

Воспользуемся полученным в работе [1] выражением для интегрального преобразования производящей функции времени пребывания процесса $\xi(t)$ над нулевым уровнем $Me^{-\mu Q(\theta_s)} = \frac{s}{\mu} C(s, \mu, 0)$.

Тогда, спроектировав (7) на $\mathfrak{B}_n^{\pm}(\alpha)$, получим

$$d^+(\theta_s, \mu, \alpha) = -\frac{s}{\mu}\,[I + B_+(s, \mu, \alpha)]\,(I - \Delta)\, C(s, \mu, 0),$$

$$d^-(\theta_s, \mu, \alpha) = -\frac{s}{\mu}\,[I - B_-(s, \mu, \alpha)]\,\Delta C(s, \mu, 0).$$

Этим доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для однородного процесса $\xi(t)$ с независимыми приращениями, управляемого цепью Маркова $\eta(t)$ и имеющего характеристическую функцию* (2), *интегральное преобразование производящей функции* *времени пребывания процесса над уровнем определяется выражением*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dMe^{-\mu Q(\theta_s, x)} = \frac{s}{\mu}(B\Delta - I - B_+)C(s, \mu, 0).$$

4. Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Пусть в формуле (1) кумулянты $\psi_k(\alpha)$ имеют вид

$$\psi_k(\alpha) = i\alpha a_k + \lambda_k \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\, dL_k(x), \quad a_k > 0, \quad k = \overline{1, n},$$

и скачки процесса $\xi(t)$ в моменты перехода управляющей цепи неположительны ($\chi_{kr} \leqslant 0$), т. е. рассматривается обобщенный пуассоновский процесс, управляемый цепью Маркова $\eta(t)$ и достигающий непрерывно положительный уровень. Обозначим $\tau_x^+ = \inf\{t : \xi(t) > x\}$ — момент первого достижения уровня $x \geqslant 0$, $\bar{\xi}(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$ — максимум процесса $\xi(u)$ на временном интервале $[0; t]$.

Время пребывания $Q(t, x)$ такого процесса над положительным уровнем удовлетворяет стохастическому соотношению

$$Q(t, x+z) = \begin{cases} Q(t - \tau_x^+, z), & \text{если } \tau_x^+ < t, \\ 0, & \text{если } \tau_x^+ \geqslant t, \end{cases} \quad x > 0, \ z > 0, \ t \geqslant 0$$

$$(Q(0, x) = 0 \text{ для всех } x > 0).$$

Это соответствует для производящей функции величины $Q(t, x)$ следующему соотношению:

$$Me^{-\mu Q(t, x+z)} = \int_0^t P\{\tau_x^+ \in d\lambda\} Me^{-\mu Q(t-\lambda, z)} + P\{\bar{\xi}(t) \leqslant x\}. \tag{8}$$

Обозначим

$$P\{\bar{\xi}(\theta_s) \leqslant x\} = p(s, x), \quad P_s = P(\theta_s) = s\int_0^{\infty} e^{-st} P(t)\, dt = s(sI - Q)^{-1}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для обобщенного пуассоновского процесса $\xi(t)$, управляемого цепью Маркова $\eta(t)$ и достигающего непрерывно положительный уровень, интегральное преобразование производящей функции времени пребывания процесса над положительным уровнем определяется выражением*

$$D(\theta_s, \mu, z) - P_s = e^{-zp'(s,0)P_s^{-1}} \left(\frac{s}{\mu} C(s, \mu, 0) - P_s\right). \tag{9}$$

Для доказательства преобразуем выражение (8) по t, приняв во внимание формулу, приведенную в работе [3]:

$$Me^{-s\tau_x^+} = P\{\bar{\xi}(\theta_s) > x\} P_s^{-1};$$

получим

$$D(\theta_s, \mu, x+z) = D(\theta_s, \mu, z) + p(s, x) - p(s, x) P_s^{-1} D(\theta_s, \mu, z).$$

Предполагая существование $p'(s, 0)$, разделим обе части этого уравнения на x и устремим x к нулю. Получим следующее дифференциальное уравнение для $D(\theta_s, \mu, z)$:

$$D'(\theta_s, \mu, z) = -p'(s, 0) P_s^{-1} D(\theta_s, \mu, z) + p'(s, 0).$$

Его решение определяется выражением

$$D(\theta_s, \mu, z) - P_s = e^{-zp'(s,0)P_s^{-1}} (D(\theta_s, \mu, 0) - P_s).$$

Утверждение (9) следует из последнего соотношения и формулы (6) работы [1].

б) Пусть процесс $\xi(t)$ является монотонно возрастающим обобщенным пуассоновским процессом и кумулянты $\psi_k(\alpha)$ в формуле (1) имеют вид

$$\psi_k(\alpha) = i\alpha a_k + \lambda_k \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, dL_k(x), \quad a_k > 0, \ k = \overline{1, n}.$$

Для такого процесса распределение максимума совпадает с распределением самого процесса, а для времени пребывания $Q(t, x)$ над положительным уровнем справедливо стохастическое соотношение

$$Q(t, x) = (t - \tau_x^+)\, \delta(\tau_x^+ < t).$$

Следовательно, для производящей функции величины $Q(t, x)$ справедливо соотношение

$$Me^{-\mu Q(\theta_s, x)} = \frac{s}{s+\mu} P_{s+\mu} P\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пересыпкина С. И. О времени пребывания над нулевым уровнем однородного процесса с независимыми приращениями, заданного на цепи Маркова. — В кн.: Исследования по теории случайных процессов, К., Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 130—134.
2. Пресман Э. Л. Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, 33, № 4, с. 861—901.
3. Gusak D. V. On the continuous passage time throwgh a fixed level with a homogeneous processes with independent increments on a Markov chain. Proceeding of the Second Japan—USSR Simposium on Prob. Theory, Kyoto, 1972.—Lecture Notes Math., Springer Verlag, 1973, **330**, p. 95—103.

Институт математики АН УССР,
Украинская сельскохозяйственная академия

Поступила в редакцию
11.XI. 1976 г.