УДК 517.54

В. С. Деркач, В. П. Петренко

О связи между $\beta_\alpha(a, F)$ и $\Delta_\alpha(a, \Phi)$ для Q-псевдомероморфных функций

1. Постановка задачи и основной результат работы. Вопрос о связи между величиной дефекта в смысле Ж. Валирона и величиной отклонения для Q-псевдомероморфных функций, включая и мероморфные функции (т. е. 1-псевдомероморфные), исследовался во многих работах (см. [1—4]). Приведем два результата в этом направлении.

Теорема A [1]. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то для каждого комплексного числа a*

$$\beta(a, f) \leqslant B(\lambda, \Delta(a, f)), \tag{1}$$

где

$$B(\lambda, \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если либо } \lambda \geqslant 0{,}5, \text{ либо } \lambda < 0{,}5 \text{ и } \Delta \leqslant 1-\cos\pi\lambda, \\ \pi\lambda\left(\Delta\operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right), & \text{если } \lambda < 0{,}5 \text{ и } \Delta > 1-\cos\pi\lambda. \end{cases}$$

Заметим, что оценка (1) является точной в том смысле, что существуют мероморфные функции с произвольно малыми величинами $\beta(a, f)$ и $\Delta(a, f)$, для которых $\beta(a, f) \geqslant K(\lambda)\sqrt{\Delta(a, f)}$.

Теорема Б [4]. *Пусть $F(z)$ — Q-псевдомероморфная при $z \neq \infty$ функция* конечного нижнего порядка λ. Тогда для каждого комплексного числа a*

$$\beta(a, F) \leqslant C(Q, \lambda)\{\Delta(a, \Phi)\}^{\frac{1}{2Q+1}}, \tag{2}$$

*где $C(Q, \lambda)$ — положительная постоянная**, а $\Delta(a, \Phi)$ — величина дефекта мероморфной функции $\Phi(w)$ в точке a.*

Известно [5], что для Q-псевдомероморфных функций бесконечного нижнего порядка оценки (1) и (2), вообще говоря, теряют силу.

В теории распределения значений и теории роста Q-псевдомероморфных функций встречаемся с необходимостью изучения более общих характеристик, чем величины $\beta(a, F)$, $\Delta(a, F)$ и $\delta(a, F)$. Имеются в виду так называемые α-дефекты и α-величины отклонений (см. [6], с. 78). Напомним соответствующие определения. Пусть $F(z)$ — Q-псевдомероморфная функция. Положим при любом α, $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$\Delta_\alpha(a, F) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a, F)}{T^\alpha(r, F)},$$

$$\beta_\alpha(a, F) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, a, F)}{T^\alpha(r, F)},$$

где $T(r, F)$ — характеристика $F(z)$ и

$$m(r, a, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta}) - a|}\, d\theta,$$

$$L(r, a, F) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|}.$$

Основным результатом этой статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $F(z)$ — Q-псевдомероморфная функция конечного нижнего порядка λ, то для любого γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, и любого комплексного числа a справедлива оценка*

$$\beta_{\frac{Q+\gamma}{Q+1}}(a, F) \leqslant C(Q, \lambda)\{\Delta_\gamma(a, \Phi)\}^{\frac{1}{Q+1}}, \tag{3}$$

где $C(Q, \lambda)$ — та же постоянная, что и в оценке (2).

Следует заметить, что при $\gamma = 1$ и $Q = 1$ из оценки (3) получается оценка, аналогичная (1), которая, как отмечено выше, в определенном смысле точная. Кроме этого оценка (3) при $Q = 1$ нова и в мероморфном случае.

---

* Т. е. $F(z)$ допускает представление $F(z) = \Phi(\varkappa(z))$, где $\Phi(w)$ — мероморфная при $w \neq \infty$ функция, а $w = \varkappa(z)$ — Q-квазиконформное отображение всей z-плоскости на всю w-плоскость ($\varkappa(0) = 0$, $\varkappa(\infty) = \infty$).

** В качестве $C(Q, \lambda)$ можно выбрать $580^{16Q+4\lambda}$.

2. Вспомогательные соотношения. При доказательстве теоремы 1 существенно используем метод из работы [6]. Пусть

$$F(z) = \Phi(\varkappa(z)). \tag{4}$$

Положим*

$$\max_{|z|=R} |\varkappa(z)| = \overline{\rho}(R), \quad \min_{|z|=R} |\varkappa(z)| = \underline{\rho}(R).$$

Кроме того, пусть для фиксированного a

$$L(r, a, F) = \ln^+ \frac{1}{|F(re^{i\theta_0}) - a|} = \ln^+ \frac{1}{|\Phi(p(r)e^{i\theta_0}) - a|}. \tag{5}$$

Далее, для любого $y \geqslant 2$ положим (см. [6], с. 83)

$$\theta = \frac{\pi}{2\gamma}, \quad \alpha = \alpha(Q, \theta) = \frac{\sin^Q \theta}{e^{7Q}}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для любых фиксированных $y \geqslant 2$ и $k > 1$ и комплексного числа a имеет место оценка*

$$\int_R^{kR} \frac{L(r, a, F)}{r} dr \leqslant \frac{C(Q)}{y} n(2kR, a, F) +$$

$$+ C(Q) \ln k \frac{y^{2Q}}{\overline{\rho}^2(kR)} \int_{p(r)(1-\alpha)}^{p(r)(1+\alpha)} m(t, a, \Phi)\, t dt, \tag{7}$$

где $p(r)$ и α определены соотношениями (5) *и* (6), *а $C(Q)$ всюду означают положительные постоянные, зависящие лишь от коэффициента квазиконформности Q.*

Оценка (7) вытекает из соответствующей оценки работы [6], с. 86.

Лемма 2. *Пусть $F(z)$ — Q-псевдомероморфная функция. Для любого τ, $\frac{1}{e} < \tau < 1$, и любого a*

$$n(\tau R, a, F) \leqslant \frac{C(Q)}{(1-\tau)^{Q+1}} T\left(\frac{1}{\tau} R, F\right) + \frac{C(Q)}{(1-\tau)^Q}, \tag{8}$$

где $n(t, a, F)$ число a-точек $F(z)$, попавших в круг $K = \{z : |z| \leqslant t\}$.

Оценка (6) следует из оценок (3.9) и (3.11) работы [6].

Лемма 3 (*см.* [4], *с.* 44). *Если $T(r, \Phi)$ — характеристика функции $\Phi(w)$, а $T(r, F)$ — характеристика Q-псевдомероморфной функции $F(z)$, удовлетворяющей соотношению* (4), *то при $r > 1$ и $k > 1$*

$$T(k\overline{\rho}(r), \Phi) \leqslant C(Q)[T(C(Q)k^Q r, F) + \ln r]. \tag{9}$$

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим случай, когда для данного комплексного числа a найдется δ, $0 < \delta < 1$, такое, что

$$0 < \Delta_\delta(a, \Phi) < \infty. \tag{10}$$

Тогда для любого γ, $0 < \gamma < \delta$, получим $\Delta_\gamma(a, \Phi) = +\infty$ и, значит, в этом случае оценка (3) выполняется тривиально. Выберем любое γ, $\delta \leqslant \gamma \leqslant \leqslant 1$. В этом случае в силу (10)

$$0 \leqslant \Delta_\gamma(a, \Phi) < +\infty.$$

* Известно, что $\overline{\rho}(R)/\underline{\rho}(R) \leqslant e^{\pi Q}$ (см. [6], с. 81).

Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ $\exists r_0(a, \varepsilon) > 1$ такое, для которого при $\forall t > r_0(a, \varepsilon)$

$$m(t, a, \Phi) \leqslant [\Delta_\gamma(a, \Phi) + \varepsilon] T^\gamma(t, \Phi) = \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(t, \Phi). \qquad (11)$$

Из оценок (7) и (11) находим $(r > r_0)$

$$\int_R^{kR} \frac{L(r, a, F)}{r} dr \leqslant \frac{C(Q)}{y} n(2kR, a, F) +$$

$$+ C(Q) \ln k \frac{y^{2Q}\alpha(Q, \theta)}{\bar{\rho}^2(kR)} \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(2\bar{\rho}(kR), \Phi) \bar{\rho}^2(kR). \qquad (12)$$

Используя (6), (8) и (9), запишем оценку (12) в виде

$$\int_R^{eR} \frac{L(r, a, F)}{r} dr \leqslant C(Q) y^Q \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(C(Q) R, F) + C(Q) \frac{T(6e^2R, F)}{y} =$$

$$= C(Q) \left[y^Q \mu(\gamma, a, \varepsilon) T^\gamma(C(Q) R, F) + \frac{1}{y} T(C(Q) R, F) \right], \qquad (13)$$

где

$$y = \begin{cases} \{T(C(Q) R, F)\}^{\frac{1-\gamma}{Q+1}}, & \text{если } \gamma < 1, \\ \dfrac{1 + 2\{\mu(\gamma, a, \varepsilon)\}^{\frac{1}{Q+1}}}{\{\mu(\gamma, a, \varepsilon)\}^{\frac{1}{Q+1}}}, & \text{если } \gamma = 1. \end{cases}$$

Тогда из (13) найдем:

$$\int_R^{eR} \frac{L(r, a, F)}{r} dr \leqslant C(Q) \{\mu(\gamma, a, \varepsilon)\}^{\frac{1}{Q+1}} T^{\frac{Q+\gamma}{Q+1}}(C(Q) R, F) = \sigma(R, \gamma, a). \quad (14)$$

Пусть

$$B(R) = \{r \in [R, eR]: L(r, a, F) \geqslant e\sigma(R, \gamma, a)\}. \qquad (15)$$

Из (14) получаем

$$\sigma(R, \gamma, a) \leqslant \int_{B(R)} \frac{L(r, a, F)}{r} dr \geqslant e\sigma(R, \gamma, a) \int_{B(R)} \frac{dr}{r} \geqslant \frac{\sigma(R, a, \gamma)}{R} \operatorname{mes} B(R),$$

т. е. $\operatorname{mes} B(R) \leqslant R$, значит, $\operatorname{mes} CB(R) \leqslant (e-2) R$.

Выбирая любое $r \in CB(R)$, в силу (15) имеем

$$L(r, a, F) \leqslant e\sigma(R, \gamma, a). \qquad (16)$$

Заметим, что $F(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, поэтому существует последовательность $R_n \uparrow \infty$ такая, что

$$T(C(Q) R, F) \leqslant C(Q)^{\lambda+1} T(R, F). \qquad (17)$$

Из оценок (17), (16) и (14) получаем

$$\beta_{\frac{Q+\gamma}{Q+1}}(a, F) \leqslant C(Q) \{\mu(\gamma, a, \varepsilon)\}^{\frac{1}{Q+1}} = C(Q) \{\Delta_\gamma(a, \Phi) + \varepsilon\}^{\frac{1}{Q+1}}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ любое, то отсюда следует оценка (3). Для завершения доказательства теоремы 1 остается рассмотреть случай, когда (10) не имеет места ни при каком δ, $0 < \delta < 1$. При этом могут возникнуть следующие две возможности. Во-первых, для каждого γ, $0 < \gamma < 1$, $\Delta_\gamma(a, \Phi) = 0$. В этом случае проходят все предыдущие рассуждения с $\mu(\gamma, a, \varepsilon) = \varepsilon$. Во-вторых, для каждого γ, $0 < \gamma < 1$, $\Delta_\gamma(a, \Phi) = +\infty$. В этом случае оценка (3) выполняется тривиально. Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

4. Замечание. Пусть

$$\overline{H}(z) = \overline{G}(\varkappa(z)) = \{g_1(\varkappa(z)), \ldots, g_p(\varkappa(z))\}$$

— p-мерная однородная Q-квазиконформная целая кривая (см. [7]) и $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ — p-мерный комплексный вектор. Характеристики роста и распределения значений $\overline{H}(z)$ определяются следующим образом (см. [7—10]):

$$m(r, \overline{a}, \overline{H}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|\overline{H}(re^{i\theta})\| \|\overline{a}\|}{|(\overline{H}(re^{i\theta})\overline{a})|} d\theta,$$

$$L(r, \overline{a}, \overline{H}) = \max_{|z|=r} \ln \frac{\|\overline{H}(z)\| \|\overline{a}\|}{|(\overline{H}(z)\overline{a})|},$$

$$T(r, \overline{H}) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} N(r, \overline{a}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 0), \overline{H})\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{p-1},$$

$$\beta_\alpha(\overline{a}, \overline{H}) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, \overline{a}, \overline{H})}{T^\alpha(r, \overline{H})}, \quad \Delta_\alpha(\overline{a}, \overline{H}) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, \overline{a}, H)}{T^\alpha(r, \overline{H})}.$$

Предыдущий метод можно модифицировать для установления следующего утверждения, аналогичного теореме 1.

Теорема 2. *Если $\overline{H}(z)$—p-мерная однородная Q-квазиконформная целая кривая нижнего порядка λ, то для любого γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, и любого p-мерного комплексного вектора a справедлива оценка*

$$\beta_{\frac{Q+\gamma}{Q+1}}(\overline{a}, \overline{H}) \leqslant C(Q, \lambda) \{\Delta_\gamma(\overline{a}, \overline{G})\}^{\frac{1}{Q+1}}. \tag{18}$$

Таким образом, оценка (18) устанавливает связь между величиной валироновского дефекта обычной целой кривой относительно вектора $\overline{a}$ и величиной отклонения Q-квазиконформной целой кривой относительно того же вектора $\overline{a}$. Следует заметить, что структура множества валироновских дефектных значений для обычных целых кривых в настоящее время изучена достаточно хорошо (см. [11, 12]).

В частности, используя следствие 2 из работы [12], с. 88, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть $\overline{H}(z)$ — p-мерная однородная Q-квазиконформная целая кривая конечного нижнего порядка. Тогда любое множество*

$$E = \left\{\overline{a} \subset \mathbf{C}^p : \exists\, \alpha > \frac{0{,}5 + Q}{Q+1} \text{ такое, что } \beta_\alpha(\overline{a}, \overline{H}) > 0\right\}$$

удовлетворяет условию: пересечение множества E с любой комплексной $(p-1)$-мерной гиперплоскостью, не проходящей через начало координат, имеет в этой гиперплоскости нулевую Γ-емкость (см. [13], с. 141).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fuchs W. H. J. Topics in Nevanlinna theory. — Proceeding of the NRL Conference on classical function Theory, 1970, p. 1—32.
2. Ламзина Т. Б. О росте мероморфных функций и целых кривых. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, 1973, вып. 18, с. 202—215.
3. Петренко В. П. О связи между величинами отклонений и дефектами в смысле Ж. Валирона для целых кривых и переменных поливекторов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, **40**, № 2, с. 326—337.
4. Деркач В. С. О связи между величиной отклонения и величиной дефекта в смысле Ж. Валирона для p-мерных Q-квазиконформных целых кривых. — В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений, К., Ин-т математики АН УССР, 1975, вып. 7, с. 36—61.
5. Петренко В. П. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций. I. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, **33**, № 6, с. 1330—1348.
6. Петренко В. П. Рост Q-псевдомероморфных функций. — Сиб. мат. журн., 1974, **15**, № 1, с. 76—89.
7. Петренко В. П. Рост квазиконформных целых кривых. — ДАН СССР, 1974, **216**, № 5, с. 982—985.
8. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям (дополнение А. А. Гольдберга. Некоторые вопросы теории распределения значений), М, Физматгиз, 1960. 319 с.
9. Cartan H. Sur les zéros des combinaisons lineaires de P fonctions holomorphes données. — Mathématica, 1933, **7**, p. 5—31.
10. Weyl H. Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 230 p.
11. Ламзина Т. Б. Исследование множеств приближения мероморфных функций и целых кривых. Автореф. канд. дис., Харьков, 1975. 145 р.
12. Фаворов С. Ю. Об одном свойстве целых кривых. — Функциональный анализ и его приложения, 1975, **9**, вып. 1, с. 87—88.
13. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 430 с.

Харьковский
государственный университет

Поступила в редакцию
27.X. 1976 г.