УДК 517.53

В. А. Зморович, Л. А. Гудзь

О параметрическом методе решения экстремальных задач теории специальных классов аналитических функций

В работе [1], используя метод статьи [2], решена задача об установлении радиуса α-выпуклости класса Σ^* однолистных звездных функций в области $0<|z|<1$. В данной работе авторы предлагают метод решения более общей задачи, из которой, как частный случай, следует основной результат работы [1].

Пусть $\Sigma_\beta^*(m)$ — класс всех m-кратно симметричных однолистных звездных функций $F(z)$ порядка β в области $0<|z|<1$. Функции $F(z)$ определяются разложениями вида $F(z)=\frac{1}{z}+\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{mk+1}$ и удовлетворяют условию $z\frac{F'(z)}{F(z)}=-\frac{p(z)+h}{1+h}$, где $h=\frac{\beta}{1-\beta}$, $\beta\in[0,1)$, m — целое $\geqslant 1$, $p(z)$ регулярны в $|z|<1$ и удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} p(z)>0$, $p(\varepsilon z)=p(z)$, $\varepsilon=\exp\left\{\frac{2\pi i}{m}\right\}$.

Пусть α, $-\infty<\alpha<+\infty$, — фиксированное число и

$$r(F)=\sup\left\{r:-\operatorname{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{zF'(z)}{F(z)}+\alpha\left(1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right\}>0,\ 0<|z|<1\right\}.$$

Число $r(\alpha, \beta, m) = \inf\{r(F) : F \in \Sigma_\beta^*(m)\}$ назовем радиусом α-выпуклости класса $\Sigma_\beta^*(m)$.

Имеем

$$1 + z\frac{F''(z)}{F'(z)} = -\frac{p(z)+h}{1+h} + \frac{zp'(z)}{p(z)+h},$$

тогда

$$(1-\alpha)\frac{zF'(z)}{F(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right) = -\Psi[p(z), zp'(z)],$$

где $\Psi[p(z), zp'(z)] = \dfrac{p+h}{1+h} - \dfrac{\alpha z p'}{p+h}$.

Для того, чтобы найти радиус α-выпуклости класса $\Sigma_\beta^*(m)$, нужно найти

$$Z(r) = \min_{p(z)\in P(m)} \min_{|z|=r} \operatorname{Re}\Psi[p(z), zp'(z)], \quad 0 < r < 1,$$

и определить наименьший положительный корень уравнения $Z(r) = 0$.

Используя метод, разработанный в [2], задачу об отыскании $Z(r)$ можно свести к нахождению явного выражения для минимума функции

$$Q(r) = \operatorname{Re}\left[\frac{p+h}{1+h} - \frac{\alpha m}{2}\frac{p^2-1}{p+h}\right] - \frac{|\alpha| m}{2}\frac{\rho^2 - |p-a|^2}{|p+h|}$$

в круге $|p - a| \leqslant \rho$, где $a = \dfrac{1+r^{2m}}{1-r^{2m}}$, $\rho = \dfrac{2r^m}{1-r^{2m}}$.

Полагая $p + h = Re^{i\theta}$, рассматриваемую задачу приводим к отысканию минимума функции

$$Q_1(r) = \frac{R}{1+h}\cos\theta - \frac{m\alpha}{2}R\cos\theta - \frac{m\alpha}{2}\frac{h^2-1}{R}\cos\theta +$$
$$+\alpha m h + \frac{|\alpha| m}{2}\frac{R^2 - 2(a+h)R\cos\theta + h^2 + 2ah + 1}{R}$$

в круге $R^2 - 2(a+h)R\cos\theta + h^2 + 2ah + 1 \leqslant 0$.

Замечая, что найденный минимум придется приравнять нулю и решать полученное таким образом уравнение относительно r, а также учитывая то, что искомый минимум — корень монотонно убывающей на $[0,1]$ функции r, предполагаем изменить метод отыскания числа $r(\alpha, \beta, m)$ следующим образом.

Предположим, что $\alpha \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение $Q_1(R, \cos\theta) = 0$. Его можно переписать в виде

$$\alpha = \eta(R, \tau) \equiv \frac{2R^2\tau}{(1+h)m\{[R^2+2(a+h)R+h^2-1]\tau - (R^2+2hR+1+2ah+h^2)\}}, \tag{1}$$

где $\tau = \cos\theta \in \left(\dfrac{R^2+h^2+2ha+1}{2(a+h)R}, 1\right)$.

Отсюда легко получить, что $\dfrac{\partial\eta}{\partial\tau} < 0$ при фиксированном $R > 0$. Поэтому минимум $\eta(R, \tau)$ при фиксированном $R > 0$ всегда реализуется при $\tau = 1$.

Имеем $\eta(R, 1) = \dfrac{R^2}{(1+h)m[a(R-h)-1]}$. Нас интересует только положительное значение $\eta(R, 1)$. Поэтому должно быть $R \in \left(h + \dfrac{1}{a}, a+\rho+h\right)$.

Абсолютный минимум функции $\eta(R, 1)$ при $R > h + \frac{1}{a}$ реализуется в точке $R_0 = 2\left(h + \frac{1}{a}\right)$. При значениях a, достаточно близких к 1, имеем $R_0 > a + \rho + h$, так что уравнение

$$a + \rho + h = 2\left(h + \frac{1}{a}\right), \quad \rho = \sqrt{a^2 - 1}, \tag{2}$$

имеет только один корень $a_0 > 1$.

Очевидно, при $a \in (1, a_0)$ справедливо неравенство $R_0 > a + \rho + h$, а при $a > a_0$ — неравенство $a - \rho + h < R_0 < a + \rho + h$. Отсюда следует, что при $a \in (1, a_0)$ минимум функции $\eta(R, 1)$ на сегменте $a - \rho + h \leqslant R \leqslant a + \rho + h$ определяется формулой

$$\eta_1(a) = \eta(a + \rho + h, 1) = \frac{(a - \rho)(a + \rho + h)^2}{m(1 + h)\rho}, \tag{3}$$

а при $a > a_0$ — формулой

$$\eta_2(a) = \eta(R_0, 1) = \frac{4}{a^2}\frac{ha + 1}{m(h+1)}. \tag{4}$$

Ясно, что $\eta_1(a_0) = \eta_2(a_0)$. Обозначим $\alpha_0 = \eta_1(a_0)$. Тогда при $\alpha > \alpha_0$ величина $r(\alpha, \beta, m)$ определяется формулой

$$r(\alpha, \beta, m) = \sqrt[2m]{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}}, \tag{5}$$

где a_1 — единственный на $(1, \infty)$ корень уравнения

$$\alpha = r_1(a). \tag{6}$$

При $\alpha < \alpha_0$ получаем

$$r(\alpha, \beta, m) = \sqrt[2m]{\frac{a_2 - 1}{a_2 + 1}}, \tag{7}$$

где a_2 — единственный на $(1, \infty)$ корень уравнения

$$\alpha = r_2(a). \tag{8}$$

В первом случае экстремальная функция класса $\Sigma_\beta^*(m)$ определяется по функции $p(z) = \frac{1 + z^m}{1 - z^m} \in P(m)$, во втором — по функции вида

$$p(z) = \frac{1}{2}\frac{1 + z^m e^{i\theta}}{1 - z^m e^{i\theta}} + \frac{1}{2}\frac{1 + z^m e^{-i\theta}}{1 - z^m e^{-i\theta}}.$$

Итак, получено решение задачи при $\alpha \geqslant 0$. Действительно, достаточно заметить, что указанным приемом находим наименьшее значение r, при котором возможно требуемое уравнение (1).

В заключение в (2) — (4) положим $a = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $\rho = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, где $t > 1$ (следует иметь в виду, что $a^2 - \rho^2 = 1$).

Тогда вместо уравнения (2) получим

$$h = \frac{t^3 - 3t}{t^2 + 1}. \tag{9}$$

Затем,

$$\eta_1(r) = \eta_1^*(t) = \frac{2(t + h)^2}{m(1 + h)(t^2 - 1)}, \tag{10}$$

$$\eta_2(r)=\eta_2^*(t)=\frac{8t(ht^2+2t+h)}{(1+h)\,m\,(t^2+1)^2}. \tag{11}$$

Подставляя в (10) и (11) выражение для h из (9), получаем

$$\alpha_0=\frac{8t^2(t+1)}{m(t^2+1)(t^2+2t-1)}, \tag{12}$$

где α_0—«переходное» значение α, если в формуле (12) под t понимать единственный корень $t(h)>1$ уравнения (9). Формулы (9) и (12) дают параметрическое решение рассматриваемой задачи при $\alpha \geqslant 0$. Если положить в (9) и (12) $t=t_0\in(\sqrt{3},\infty)$, то получим такие α_0 и h, для которых величина $r(\alpha, \beta, m)$ определяется правилом:

если $\alpha>\alpha_0$, то из уравнения $\eta_1^*(t)=\alpha$ находим его единственный корень $t_1>1$, и тогда

$$r(\alpha,\beta,m)=\sqrt[m]{\frac{t_1-1}{t_1+1}}. \tag{13}$$

Если же $\alpha<\alpha_0$, то вместо t_1 в предыдущую формулу нужно подставить t_2, где t_2—единственный корень уравнения $\eta_2^*(t)=\alpha$ на интервале $(1,+\infty)$. Если из (9) и (12) исключить t, то получим алгебраическое уравнение, непосредственно связывающее параметры h и m с «переходным» значением α_0. Это уравнение, очевидно, нулевого жанра относительно переменных h и $m\alpha_0$. Нетрудно проверить, что с возрастанием t от $\sqrt{3}$ до $+\infty$ величина α_0 монотонно убывает от $\frac{3}{m}$ до 0. Поэтому, если $\alpha \geqslant \frac{3}{m}$, то $r(\alpha, \beta, m)$ определяется формулой (13). При $\alpha \leqslant 0$ полагаем $\alpha=-\gamma$, где $\gamma \geqslant 0$, и вместо уравнения (1), полагая $p(z)+h=a+x+h+iy$, где $x^2+y^2\leqslant\rho^2$, получаем уравнение

$$\gamma=\frac{2(a+x+h)}{m(1+h)\,\varphi(x,y)},$$

где

$$\varphi(x,y)=2h-(a+x+h)-\frac{(h^2-1)(a+x+h)}{(a+x+h)^2+y^2}-\frac{x^2+y^2-\rho^2}{\sqrt{(a+x+h)^2+y^2}}.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x,y)=\frac{2(a+x+h)}{m(1+h)\,\varphi(x,y)}.$$

Нетрудно доказать, что при фиксированном $x\in(-\rho,\rho)$ и $y>0$ $\frac{\partial\Phi}{\partial y}>0$, так что минимум функции $\Phi(x,y)$ в круге $x^2+y^2\leqslant\rho^2$ достигается на его диаметре $y=0$.

Полагая $\Phi_0=\Phi(x,0)$ и вводя обозначение $R=a+x+h$, где $a-\rho+h\leqslant R\leqslant a+\rho+h$, имеем

$$\Phi_0=\frac{R^2}{m(1+h)(a+h-R)(R-h)}. \tag{14}$$

Рассматривая Φ_0 при $a+h>R>0$, находим, что абсолютный минимум Φ_0 на этом интервале достигается в точке $R=R_0^*\equiv\frac{2h(a+h)}{a+2h}$. При значениях a, близких к 1, имеем $R_0<a-\rho+h$, следовательно,

$$R_0=a-\rho+h \tag{15}$$

имеет один корень $a_0 > 1$. Поэтому при $1 < a < a_0$ минимум Φ_0 на $[a - \rho + h,\ a + \rho + h]$ достигается в точке $R = a - \rho + h$ и равен $\zeta_1(a) = \frac{(a-\rho+h)^2}{m(1+h)\rho(a-\rho)}$. При $a > a_0$ этот минимум достигается в точке $R = R_0^*$ и равен $\zeta_2(a) = \frac{4h(a+h)}{m(1+h)a^2}$.

Выражая a и ρ через t, как и в случае $\alpha \geqslant 0$, получаем следующие формулы:

$$h = \frac{t^2+1}{t^3-3t}, \tag{16}$$

$$\zeta_1(a) = \zeta_1^*(t) \equiv \frac{2(1+ht)^2}{m(1+h)(t^2-1)}, \tag{17}$$

$$\zeta_2(a) = \zeta_2^*(t) \equiv \frac{8ht(t^2+2ht+1)}{m(1+h)(t^2+1)^2}. \tag{18}$$

Подставляя в (17) и (18) выражение для h из (16), получаем

$$\gamma_0 = \frac{8t(t+1)}{m(t^2-3)(t^2+2t-1)}. \tag{19}$$

Формула (19) определяет «переходное» значение параметра γ, если под $t > 1$ понимать корень уравнения (16). Если $\gamma > \gamma_0$, то $r(-\gamma, \beta, m)$ определяется формулой (13), где вместо t_1 нужно подставить единственный на $(1, \infty)$ корень уравнения

$$\zeta_1^*(t) = \gamma, \tag{20}$$

а при $\gamma < \gamma_0$ — единственный на $(1, \infty)$ корень уравнения

$$\zeta_2^*(t) = \gamma. \tag{21}$$

Исключая из (16) и (19) параметр t, получаем алгебраическое уравнение относительно переменных h и $m\gamma_0$. Экстремальные функции определяются как и в случае $\alpha \geqslant 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$ *и функции* $\eta_j^*(t)$, $j = 1, 2$, *определяются формулами* (10) *и* (11). *Полагая*

$$\alpha_0 = \frac{8u^2(u+1)}{m(u^2+1)(u^2+2u-1)},$$

где $h = \frac{u^3-3u}{u^2+1}$, *получаем формулу*

$$r(\alpha, \beta, m) = \sqrt[m]{\frac{t_\nu - 1}{t_\nu + 1}}, \quad \nu = 1, 2,$$

в которой при $\alpha > \alpha_0$ *нужно брать* t_1 *— единственный корень уравнения* $\eta_1^*(t) = \alpha$, *а при* $\alpha < \alpha_0$ *соответственно* t_2 *— единственный корень уравнения* $\eta_2^*(t) = \alpha$. *В случае* $\alpha = -\gamma$, $\gamma \geqslant 0$, *в формуле для* $r(\alpha, \beta, m)$ *под* t_1 *и* t_2 *нужно понимать соответственно корни уравнений* $\zeta_j^*(t) = \gamma$, $j = 1, 2$, *где* $\zeta_1^*(t)$ *и* $\zeta_2^*(t)$ *определяются формулами* (17) *и* (18). *Первая из этих формул применяется при* $\gamma > \gamma_0$, *вторая — при* $\gamma < \gamma_0$, *где*

$$\gamma_0 = \frac{8v(v+1)}{m(v^2-3)(v^2+2v-1)}, \quad h = \frac{v^2+1}{v^3-3v}.$$

Экстремальные функции в обоих случаях определяются как указано выше.

Примечание. При $m = 1$, $\beta = 0$ получаем основной результат работы [1]. При $m = 1$, $\alpha = 1$ получаем теорему 2 из работы [3], а при $\alpha = 1$ теорему 2 из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hassoon S. Al-Amiri, The radius of α-con — vexity for the class of starlike univalent functions in the circular region $0 < |z| < 1$. — Revue Roum. math. pures et appl., 1975, **20**, N 8, p. 863—868.
2. Зморович В. А. Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій. — ДАН УРСР, 1965, № 8, с. 980—983.
3. Зморович В. А. О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге $|z| < 1$ и круговой области $0 < |z| < 1$. — Мат. сб., 1965, **68**, № 4, с. 518—526.
4. Засько В. Н. О границах выпуклости классов $S_{\alpha}^{*}(m)$ и $\Sigma_{\alpha}^{*}(m)$.—УМЖ, 1969, **21**, № 3, с. 386—392.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
29.X.1976 г.